INFORMATIKA

Kruhový model roviny

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Studenti, kteří znají geogebru a mají zvídavou až dobrodružnou povahu, tu dostávají podnět ke zkoumání nové neznámé planety, na níž je něco stejného jako na Zemi a něco zase úplně jiného, a mohou postupně poznávat její zákonitostí a chování.

Úvod

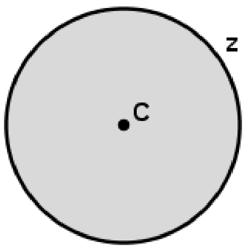
Klasický model Eukleidovské roviny je všeobecně známý, je obsahem výuky planimetrie na našich školách; rovinu s touto planimetrií označíme dále *rovina* E_2. V naší představě je bod nekonečně malá tečka a přímka je rovná nekonečně dlouhá čára nulové tloušťky. Z nich pak tvoříme další planimetrické objekty. Přitom si uvědomíme, že např. každá přímka existuje pouze v naší mysli a tužkou na papíru ji pouze neúplně modelujeme, ta naše čára tužkou je snad rovná, ale je jen krátká a má také svou nenulovou šířku.

Avšak co si nějak představit nedovedeme, je právě to nekonečno. Proto si pomáháme náhradní představou, například že každá přímka směřuje k jakémusi *nevlastnímu bodu* (bodu v nekonečnu) a přitom všechny přímky vzájemně rovnoběžné směřují k témuž nevlastnímu bodu (viz úběžník v perspektivě). Všechny nevlastní body roviny pak vyplňují nekonečně vzdálenou nevlastní přímku, která jakoby ležela kolem dokola této roviny.

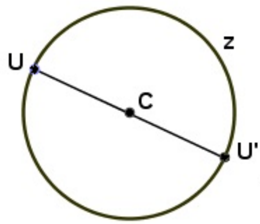
Geometrické modely Eukleidovské geometrie na základě axiomů, jak je vyjádřil D. Hilbert, však mohou být i jiné, než je ten náš školní E_2, připomeňme jen dva z nich: model Beltrami–Kleinův a model Poincarého. Oba jmenované modely mají společné to, že pojem *rovina* je modelován jako kruh. V tomto článku předvedeme ještě jiný (snad docela zajímavý) *kruhový model roviny* (T-model, což je tím vstupem na neznámou planetu) a rovinu s T-modelem nazveme *rovina* T_2. Hned na počátku lze doporučit, abyste si otevřeli geogebru a všechno, s čím se setkáte dále, si sami hned vyzkoušeli prakticky.

Úvodní pojmy

V rovině E_2 zvolme kruh K o středu C a o libovolném poloměru r – ten dále nebude hrát žádnou roli. *Rovinou* T_2 rozumíme vnitřek kruhu K. V rovině T_2 máme body roviny – jsou to body uvnitř K, přitom C nazveme *centrální bod*. Každou úsečku, která je průměrem kruhu K, nazveme *centrální přímka* roviny, každou dvojici $[U, U']$ koncových bodů centrální přímky nazveme *nevlastní bod* roviny, množinou všech nevlastních bodů (tj. kružnice z) je *nevlastní přímka* roviny T_2.



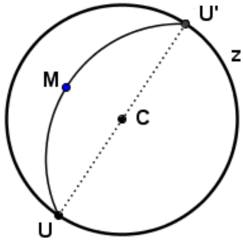
Obr. 1 Model roviny T_2



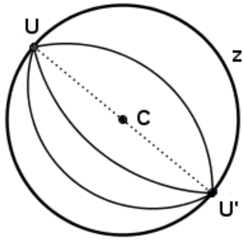
Obr. 2 Centrální přímka a nevlastní bod

Každý oblouk kružnice, který půlí kružnici z, nazveme *přímka* roviny T_2, někdy pro srozumitelnost řekneme *T-přímka* (také centrální přímky patří mezi T-přímky). Pojmy *úsečka* a *polopřímka* jsou pak také jistě srozumitelné. Dvě přímky v T_2 považujeme za rovnoběžné, procházejí-li týmž nevlastním bodem. Každá přímka v rovině T_2 je tedy rovnoběžná s nějakou centrální přímkou, kterou nazveme *příslušná centrální přímka*. Dokonce je účelné, ke každé přímce si vždy současně zobrazit i příslušnou centrální přímku; dále uvidíme, jak to usnadňuje řešení úloh.

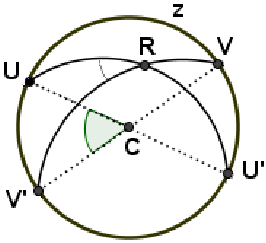
Centrální bod C si můžeme představit jako bod, „kde se právě nacházíme“, a proto se nám jeví přímky jdoucí přes centrální bod (tj. centrální přímky) jako „rovné“ a také úhly s vrcholem C se nám jeví ve stejné velikosti jako v rovině E_2. Za odchylku (úhel) dvou přímek v rovině T_2 považujeme odchylku (úhel) jejich příslušných centrálních přímek. Odsud plyne také realizace kolmosti v rovině T_2.



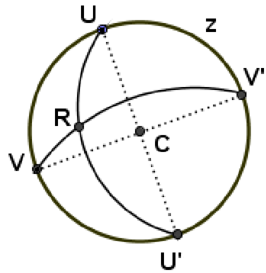
Obr. 3 Bod na přímce



Obr. 4 Soustava rovnoběžek

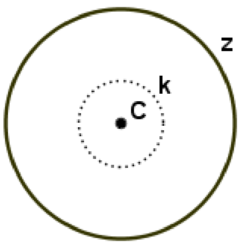


Obr. 5 Úhel dvou přímek

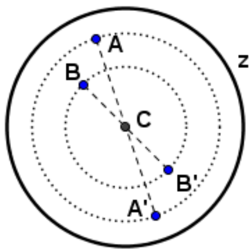


Obr. 6 Kolmé přímky

Z postavení centrálního bodu dále logicky vyplývá, a tak to v rovině T_2 bereme, že když se vzdalujeme od bodu C, roste vzdálenost od C ve všech směrech stejně. Lze tedy zavést pojem *centrální kružnice*, která se nám skutečně jeví jako kružnice, a má i svou základní vlastnost, že je to množina všech bodů roviny T_2 stejně vzdálených od středu (od bodu C).



Obr. 7 Centrální kružnice



Obr. 8 Středová souměrnost bodů

V souvislosti s centrální kružnicí si ještě uveďme, že v rovině T_2 můžeme pracovat se středovou souměrností se středem C, s osovou souměrností, v níž osou souměrnosti je centrální přímka, a s otočením se středem C.

K vytváření obrázků zde využíváme možností geogebry a proto pro potřebné konstrukce v rovině T_2 není třeba používat prostředky pro práci v rovině E_2. Všechny konstrukce budeme provádět v rovině T_2, což už v následujících úlohách nebudeme připomínat.

Úloha 1

Daným bodem M veďte rovnoběžku q s danou přímkou p.

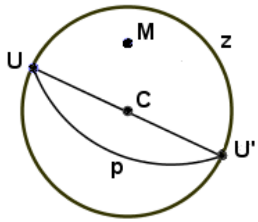
Úloha 2

Z daného bodu M spusťte kolmici k k dané přímce p.

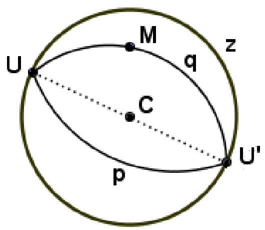
Poznámka. V obrázcích k řešení úloh nebudeme označovat každý element roviny T_2, abychom nedostali nepřehledné obrázky, ale vyznačíme jen ty, které je třeba pro srozumitelný popis řešení.

K úloze 1: Přímka q prochází bodem M a stejným nevlastním bodem $[U, U']$ jako přímka p. Přímku q tedy sestrojíme jako oblouk kružnice procházející body U, M, U'.

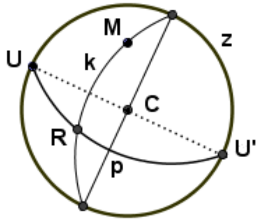
K úloze 2: K centrální přímce UCU' příslušné k T-přímce p sestrojíme kolmou centrální přímku VCV' a ta je příslušná k hledané kolmici q. Opět jde o oblouk kružnice, která prochází třemi danými body V, M, V'.



Obr. 9 Zadání k úlohám 1 a 2



Obr. 10 Řešení úlohy 1



Obr. 11 Řešení úlohy 2

Úloha 3

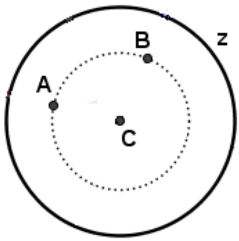
Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte osu o úhlu ACB.

Úloha 4

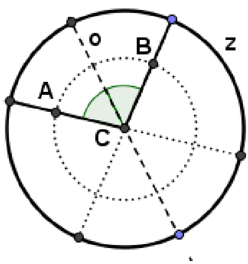
Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte úsečku AB a její střed S.

K úloze 3: Sestrojíme ramena úhlu, tj. polopřímky CA, CB. Úhel ACB v rovině T_2 má stejnou velikost jako v rovině E_2, takže i osu o úhlu ACB dostaneme stejně (tj. rozpůlením úhlu), jako v E_2; osou je centrální přímka o.

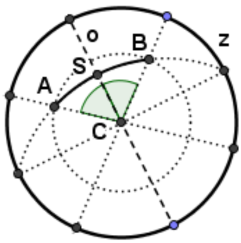
K úloze 4: Osa úhlu ACB je současně osou úsečky AB, tedy úsečka AB je kolmá na osu o. Centrální přímka příslušná k přímce AB je tedy kolmice k ose procházející bodem C. Úsečku AB v rovině T_2 tak dostaneme jako část kruhového oblouk procházejícího příslušným nevlastním bodem a body A, B. Středem S úsečky AB je pak průsečík úsečky s osou o.



Obr. 12 Zadání k úlohám 3 a 4



Obr. 13 Řešení úlohy 3

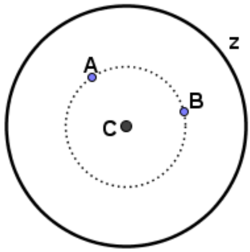


Obr. 14 Řešení úlohy 4

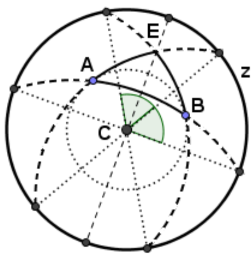
Úloha 5

Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABE.

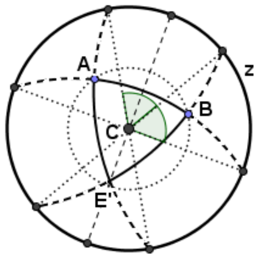
K úloze 5: Přímka AB rozděluje rovinu T_2 na dvě poloroviny, v každé z nich má daná úloha jedno řešení. Jelikož vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku jsou $60°$, jsou centrální přímky stran trojúhelníku navzájem otočené právě o $60°$ a k nim už potřebné přímky AB, AE, BE lehce sestrojíme (úloha 1). Nakonec byl v obrázcích upraven styl čar.



Obr. 12 Zadání úlohy 5



Obr. 16 První řešení úlohy 5

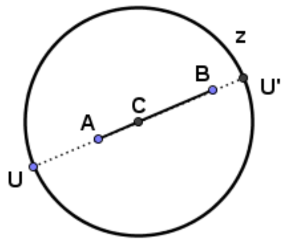


Obr. 17 Druhe řešení úlohy 5

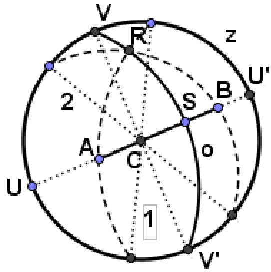
Úloha 6

Na centrální přímce jsou dány body A, B. Sestrojte osu o úsečky AB a její střed S.

K úloze 6: Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABR se základnou AB. Zvolíme libovolné a stejné úhly při základně trojúhelníku, tedy sestrojíme centrální přímky 1 a 2, které s centrální přímkou UCU' svírají týž úhel. Pak body A, resp. B, vedeme s těmito centrálními přímkami 1 a 2 rovnoběžky; na nich leží strany AR, BR trojúhelníku a jejich průsečíkem je právě bod R. Tímto bodem vedeme kolmici k AB (úloha 2), což je hledaná osa o. Jejím průsečíkem s úsečkou AB je střed S úsečky.



Obr. 18 Zadání úlohy 6

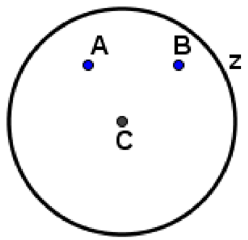


Obr. 19 Řešení úlohy 6

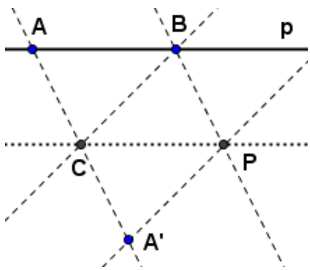
Úloha 7

Jsou dány body A, B, sestrojte přímku AB.

K úloze 7: V úloze 4 byl řešen zvláštní případ, kdy oba zadané body leží na téže centrální kružnici. Nechť tedy body A, B neleží ani na téže centrální kružnici, ani na téže centrální přímce.



Obr. 20 Zadání úlohy 7

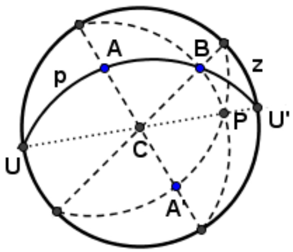


Obr. 21 Analýza řešení úlohy 7

Hlavní myšlenkou řešení je získat centrální přímku, která má stejný směr jako hledaná přímka $p = AB$. Na obr. 21 je v E_2 sestrojeno: bod A' souměrně sdružený s bodem A podle středu C), takže $|AC| = |CA'|$; centrální přímky CA, CB, bodem A' rovnoběžka s CB, bodem B rovnoběžka s CA s průsečíkem P (ukážeme, že CP je hledanou centrální přímkou). Platí

$$|BC| = |PA'| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CA'P|,$$

tedy trojúhelníky ACB, $CA'P$ jsou shodné podle věty sus; proto platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle PCA'|$. Z této rovnosti úhlů pak plyne $AB \parallel CP$. Všechny uvedené konstrukce jsou postupně realizovatelné v rovině T_2, jak bylo vidět v předchozích úlohách.



Obr. 22 Řešení úlohy 7

Díky řešení této úlohy se k řešení nabízí mnoho dalších úloh, v nichž je třeba sestrojit úsečku nebo přímku danou dvěma body. Je možno doporučit, než se dáte do dalších úloh, vyzkoušet si znovu a s pozměněným zadáním všechny ty předchozí. Uveďme si nyní některé další úlohy v rovině T_2:

- Jsou dány body A, B a bod M.
  a) bodem M veďte rovnoběžku s přímkou $p = AB$;
  b) bodem M veďte kolmici k přímce $p = AB$.
- Jsou dány body A, B.
  a) Sestrojte střed S úsečky AB (užitím rovnoběžníku $ACBE$ v T_2, S je jeho střed);
  b) Sestrojte osu úsečky AB.
  c) Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABE.
- Jsou dány body A, B, V, sestrojte osu úhlu AVB.
- Na dvou různých centrálních přímkách jsou dány úsečky AB a PQ. Rozhodněte o jejich shodnosti, resp. která z nich je v T_2 delší. (Návod: Obě úsečky, tj. každou zvlášť, je třeba shodným zobrazením na T_2 zobrazit na úsečku, jejímž jedním krajním bodem je střed C. Pro každou z nich to znamená např. posloupnost dvou rovnoběžných posunutí, napřed na rovnoběžku s centrální přímkou a pak zpět tak, aby obrazem bodu A nebo B, resp. P nebo Q, byl bod C. Délky pak jednoduše porovnáme užitím vhodné centrální kružnice.)

Na závěr uveďme ještě jednu úlohu, kde se vynořuje metrika.

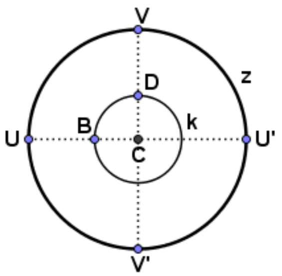
Úloha 8

V rovině T_2 je dána centrální kružnice k; sestrojte centrální kružnici h, jejíž poloměr je dvojnásobný.

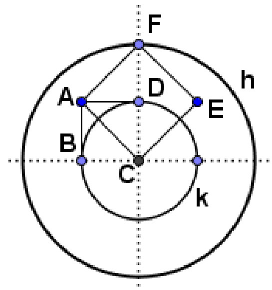
K úloze 8: Zvolíme dvojici kolmých centrálních přímek UCU', VCV', průsečíky s kružnicí k jsou body B a D. Sestrojíme bod A tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec (v rovině T_2vedeme bodem D rovnoběžku s UCU' a bodem B rovnoběžku s VCV'. Pokud za poloměr kružnice k zvolíme např. 1, pak

$$|CA| = \sqrt{2} \qquad (\text{v } T_2, \text{ nikoli v } E_2).$$

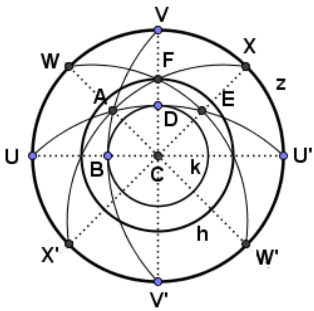
Nyní sestrojíme čtverec nad stranou AC, tedy k centrální přímce WCW' vedeme kolmici XCX' a sestrojíme na ní bod E tak, že $|CE| = |CA|$. Stejným způsobem jako u bodu A doplníme vrchol čtverce F a pak podle Pythagorovy věty a obr. 24 můžeme $|CF|$ považovat za velikost 2 (tj. její model v T_2), měřenou od bodu C po centrální přímce. Kružnice h tak má střed v C a prochází bodem F.



Obr. 23 Zadání úlohy 8



Obr. 24 Analýza řešení úlohy 8



Obr. 25 Řešení úlohy 8

Nakonec si ještě řekněme, že jsme v tomto článku představili jakousi hru s rovinou T_2, ale ona to zase jenom tak úplně hra nebyla, protože umožnila hlubší pohled na základní planimetrické pojmy a konstrukce. Jednou z důležitých otázek, na kterou jsme zde však odpověď nehledali, je, je-li tento T-model roviny bezesporný, tj. zda se nemůže stát, že bychom dvěma různými „správnými" postupy dostali odlišné výsledky. Tento článek nechává uvedený problém otevřený.

Videoprezentace pomocí HTML5 jako modul LMS Moodle

MILAN NOVÁK

Přírodovědecká fakulta JČU, České Budějovice

Přestože se informační technologie již zcela zabydlely v našich každodenních činnostech a ani ve vzdělávání nelze pociťovat v tomto směru příliš mnoho rušivých momentů, naleznou se zlomové technologie, které přímo ovlivňují naše životy a mají také dopad na vzdělávání. Školy se snaží přijít na to, jak integrovat mobilní aplikace, tablety a cloudové služby do svých technologických strategií.

Ve vzdělávání se začíná zcela běžně využívat videa jako výukového prostředku a díky neustále se zvyšujícímu zájmu o „chytrá" mobilní zařízení se mobilní video stává všudypřítomné. Záznam přednášek je páteřní aplikací pro vzdělávací videa. Nelze si nevšimnout, že všechny hlavní platformy hledají nejefektivnější cesty přehrávání videí na mobilních zařízeních. Lze říci, že změna využívání kombinace mobilních zařízení a vzdělávacího videa nastává sice pozvolně, ale již nyní je nelze ignorovat. S tímto faktem se mohou objevit i některé technologické problémy, které se musí eliminovat, aby nezpůsobily problémy v otázkách přístupnosti výukových materiálů.