O řešení funkcionálních nerovnic

PAVEL CALÁBEK – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problematika řešení funkcionálních rovnic, nerovnic a jejich soustav je trvale vyhledávanou oblastí nadstandarní části školské matematiky zejména pro matematické soutěže. Svědčí o tom např. použití dvou úloh uvedeného typu v aktuálním (8.) ročníku Středoevropské MO (MEMO), která se uskutečnila v září 2014 v Drážďanech (viz příklad 6 našeho článku).

V tomto příspěvku se zaměříme na řešení funkcionálních nerovnic a jejich soustav. Uvedeme zde základní metody a postupy řešení úloh uvedeného typu. Podobně jako v [1] zde budou prezentovány základní metody jejich řešení na konkrétních úlohách. Jsou jimi, podobně jako v [1], především *metoda specifikace proměnných* a *metoda symetrie*. V případě řešení funkcionálních nerovnic a jejich soustav zde navíc přistupuje i potřebná znalost elementárních metod řešení algebraických nerovnic.

I v tomto příspěvku předpokládáme u čtenáře pouze základní znalosti z oblasti teorie funkcí v reálném oboru (v rozsahu učebnic pro střední školy). Připomínáme dále, že symbolem $\mathbb{R}$ budeme v celém článku značit množinu všech reálných čísel a např. symbolem $(0; +\infty)$ budeme označovat neomezený interval obsahující všechna kladná reálná čísla.

Příklad 1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$f(x) + f(y) \geq f(x)f(y) + 1.$$

Řešení. Nechť x je libovolné reálné číslo, položme $y = x$. Dostaneme tak nerovnost $2f(x) \geq f^2(x) + 1$, kterou upravíme na tvar

$$(f(x) - 1)^2 \leq 0.$$

Odtud je patrné, že pokud existuje řešení dané funkcionální nerovnice, pak pro všechna reálná čísla x platí $f(x) = 1$.

Závěr. Zkouškou (která je nutnou součástí řešení) snadno ověříme, že tato konstantní funkce je opravdu řešením dané funkcionální nerovnosti.

Příklad 2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$xf(y) + yf(x) \geq f(x)f(y) + xy.$$

Řešení. Stejně jako v předešlém příkladu dostaneme volbou $y = x$ pro libovolné reálné číslo x nerovnici $2xf(x) \geq f^2(x)+x^2$, kterou dále upravíme na tvar

$$(f(x) - x)^2 \leq 0.$$

Odtud vidíme, že nutně platí $f(x) = x$ pro všechna reálná čísla x. Provedením zkoušky opět ověříme, že nalezená funkce je opravdu řešením dané funkcionální nerovnice.

Jiné řešení. Položme nyní $x = y = 0$. Dostaneme tak $f^2(0) \leq 0$ a odtud $f(0) = 0$. Dále předpokládejme, že pro reálná čísla x, y platí $xy > 0$. Dělením obou stran této nerovnice kladným číslem xy tak dostaneme

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(y)}{y} + 1,$$

což je pro neznámou funkci $g(x) = f(x)/x$ stejná nerovnice jako v příkladu 1. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $xy > 0$ tedy platí

$$g(x) + g(y) \geq g(x)g(y) + 1.$$

Analogicky jako v příkladu 1 dostaneme $g(x) = 1$, a tudíž $f(x) = x$. Nalezený výsledek musíme (s ohledem na použitý způsob řešení) podrobit zkoušce.

Poznámka. Způsobem podobným prvnímu řešení bychom mohli také řešit funkcionální nerovnici

$$xf(x) + yf(y) \geq xyf(x)f(y) + 1.$$

Příklad 3

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$2f(x^2) + 2f(y) \geq f(x)f(xy) + 4.$$

Řešení. Položíme-li v dané nerovnici $x = y = 0$, dostaneme po úpravě

$$0 \geq (f(0) - 2)^2,$$

tedy $f(0) = 2$.

Dále položíme $y = 0$. Pro všechna reálná čísla x tedy platí

$$2f(x^2) + 2f(0) \geq f(x)f(0) + 4,$$

odtud z podmínky $f(0) = 2$ plyne $f(x^2) \geq f(x)$. Volbou $x = 0$ dále zjistíme, že pro všechna reálná čísla y platí

$$2f(0) + 2f(y) \geq f^2(0) + 4.$$

Z podmínky $f(0) = 2$ pak dostaneme $f(y) \geq 2$. Pro všechna reálná čísla x tedy platí

$$f(x^2) - 2 \geq f(x) - 2 \geq 0. \tag{1}$$

Konečně volbou $x = y$ v dané nerovnici dostaneme po úpravě

$$(f(x) - 2)(f(x^2) - 2) \leq 0.$$

Užitím (1) dále dostaneme

$$(f(x) - 2)^2 \leq (f(x) - 2)(f(x^2) - 2) \leq 0.$$

Odtud $f(x) = 2$ pro všechna reálná čísla x. Zkouškou snadno ověříme, že nalezená funkce je řešením dané funkcionální nerovnice.

Příklad 4

Najděte všechny funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$\begin{aligned} 1 + f^2(x) &\le 2g(x), \\ 1 + g^2(x) &\le 2f(x). \end{aligned}$$

Řešení. Sečtením obou daných nerovnic máme

$$1 + f^2(x) + 1 + g^2(x) \le 2f(x) + 2g(x).$$

Odtud po úpravě získáme nerovnici

$$(1 - f(x))^2 + (1 - g(x))^2 \le 0,$$

tedy pro všechna reálná čísla x nutně platí

$$f(x) = g(x) = 1.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že tyto funkce vyhovují dané soustavě funkcionálních nerovnic.

Příklad 5 (Vietnamská MO, 1991)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y, z platí

$$f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \ge \frac{1}{2}.$$

Řešení. Položme nejprve $x = y = z = 0$ a dostaneme tak

$$2f(0) - 2f^2(0) \ge \frac{1}{2}.$$

Tuto nerovnost upravíme na tvar $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \le 0$. Odtud bezprostředně plyne

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Podobně volbou $x = y = z = 1$ dostaneme

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Nyní položme $y = z = 1$. Pro všechna reálná čísla x tedy platí

$$f(x) + f(x) - 2f(x)f(1) \geq \frac{1}{2},$$

tedy

$$f(x) \geq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Naopak volbou $y = z = 0$ dostaneme pro libovolné reálné číslo x

$$2f(0) - 2f(x)f(0) \geq \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$f(x) \leq \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Spojením (2) a (3) zjistíme, že pro všechna reálná čísla x platí $f(x) = \frac{1}{2}$. Zkouškou následně ověříme, že nalezená funkce vyhovuje dané funkcionální nerovnici.

Příklad 6 (8. MEMO, 2014)

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$xf(xy) + xyf(x) \geq f(x^2)f(y) + x^2y.$$

Řešení. Volbou $x = y = 1$ v zadání po úpravě dostaneme $0 \geq (f(1) - 1)^2$, proto nutně $f(1) = 1$. Položíme-li $y = 1$, dostaneme $2xf(x) \geq f(x^2) + x^2$, což upravíme na tvar

$$2x(f(x) - x) \geq f(x^2) - x^2 \tag{4}$$

pro všechna reálná čísla x. Volbou $y = x$ dostaneme po úpravě pro všechna reálná čísla x nerovnici

$$0 \geq (f(x^2) - x^2)(f(x) - x). \tag{5}$$

Pokud pro určité kladné reálné číslo x platí $f(x^2) - x^2 > 0$, pak z (4) plyne $f(x) - x > 0$. Je tudíž $(f(x^2) - x^2)(f(x) - x) > 0$, což je ve sporu s (5), tedy pro všechna kladná reálná čísla x platí $f(x^2) \leq x^2$. Každé kladné reálné číslo lze napsat jako druhou mocninu kladného reálného čísla, tedy z této nerovnosti plyne $f(x) \leq x$ pro všechna kladná reálná čísla x. Pokud navíc pro některé kladné reálné číslo x platí $f(x)-x<0$, potom z (4) dostaneme $f(x^2)-x^2<0$, tedy $(f(x^2)-x^2)(f(x)-x)>0$, což je opět ve sporu s (5). Proto pro všechna kladná reálná čísla x platí

$$f(x)=x. \tag{6}$$

Volbou $x=y=0$ dostaneme $0\geq f^2(0)$, tj. $f(0)=0$, tedy vztah (6) je splněn pro všechna nezáporná reálná čísla x.

Dále předpokládejme, že $x<0$, $y<0$. Pak podle zadání platí

$$x^2y+xyf(x)\geq x^2f(y)+x^2y.$$

Odtud po úpravě ($x^2y<0$) obdržíme

$$\frac{f(x)}{x}\leq\frac{f(y)}{y}.$$

Tato nerovnost platí pro libovolná záporná reálná čísla x a y. Záměnou x a y potom dostaneme

$$\frac{f(y)}{y}\leq\frac{f(x)}{x}.$$

Z posledních dvou nerovností bezprostředně plyne

$$\frac{f(y)}{y}=\frac{f(x)}{x}.$$

V této rovnici položme $y=-1$ a označme $-f(-1)=k\in\mathbb{R}$. Pro všechna záporná reálná čísla x tedy platí $f(x)=kx$, kde k je některé reálné číslo. Pokud má zadaná funkcionální nerovnost řešení, potom jím je pro nějaké reálné číslo k funkce

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{pro } x\geq 0,\\ kx & \text{pro } x<0.\end{cases}$$

Nyní provedeme zkoušku, označme

$$L=xf(xy)+xyf(x),\qquad P=f(x^2)f(y)+x^2y.$$

a) Nechť $x=0$ nebo $y=0$, v obou případech $L=P=0$, tedy nalezená funkce vyhovuje zadání.
b) Pro $x>0$ a $y>0$ platí $P=2x^2y$, $L=2x^2y$, opět tedy $L\geq P$.

c) Nechť nyní $x > 0$, $y < 0$. Potom $L = kx^2y + x^2y$ a $P = kx^2y + x^2y$, tedy $L \geq P$ pro libovolné reálné číslo k.
d) Nechť $x < 0$, $y > 0$. Potom $L = 2kx^2y$ a $P = 2x^2y$, tedy $L \geq P$, právě když $k \geq 1$.
e) Nechť $x < 0$, $y < 0$. Potom $L = x^2y + kx^2y$ a $P = kx^2y + x^2y$, tedy nerovnost $L \geq P$ platí pro libovolné reálné číslo k.

Závěr. Zkouškou jsme tak ověřili, že pro každé reálné číslo $k \geq 1$ je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ kx & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

řešením dané funkcionální nerovnice.

Příklad 7

Nechť funkce $f\colon \langle 0;1\rangle \to \mathbb{R}$ pro libovolná různá reálná čísla $x, y \in \langle 0;1\rangle$ vyhovuje podmínkám

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{a} \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y).$$

a) Dokažte, že $f(x) \geq 0$ pro libovolné $x \in \langle 0;1\rangle$.
b) Dokažte, že pro nekonečně mnoho $x \in \langle 0;1\rangle$ platí $f(x) = 0$.
c) Najděte příklad takové funkce, která nabývá pro některá $x \in \langle 0;1\rangle$ nenulové hodnoty.

Řešení.
a) Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje číslo $\alpha \in \langle 0;1\rangle$ pro které $f(\alpha) < 0$. Vzhledem k podmínce $f(0) = f(1) = 0$ musí být $\alpha \in (0;1)$. Položme nejprve $x = 0$, $y = \alpha$. Dostaneme tak

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq f(0) + f(\alpha) = f(\alpha).$$

Volbou $x = 0$, $y = \frac{1}{2}\alpha$ dále dostaneme

$$f\left(\frac{\alpha}{4}\right) \leq f(0) + f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

naopak volbou $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \alpha$ dostaneme

$$f\left(\frac{3}{4}\alpha\right) \leq f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f(\alpha) \leq 2f(\alpha).$$

A nyní konečně volbou $x = \frac{1}{4}\alpha$, $y = \frac{3}{4}\alpha$ dostaneme

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq f\left(\frac{\alpha}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\alpha\right) \leq f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2f(\alpha).$$

Odtud úpravou dostaneme $0 \leq f(\alpha)$, což je spor s předpokladem $f(\alpha) < 0$. Proto platí $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle 0; 1\rangle$.

b) Užitím principu matematické indukce snadno ukážeme, že pro libovolné celé nezáporné číslo n a libovolné $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}$ platí

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0.$$

c) Funkcionální rovnici vyhovuje např. funkce $f(x)$, která pro $x \in \langle 0; 1\rangle$ tvaru $x = k/2^n$, kde k, n jsou celá nezáporná čísla, nabývá hodnotu 0. Pro zbývající hodnoty x je rovna 1.

Neřešené příklady

Na závěr uvádíme dvojici neřešených úloh, které jsou určeny zájemcům o uvedenou problematiku.

Příklad 8

Najděte všechny funkce $f\colon \langle 1; +\infty) \to \langle 1; +\infty)$ takové, že pro všechna reálná čísla $x \in \langle 1; +\infty)$ současně platí

$$f(x) \leq 2(x+1) \qquad \text{a} \qquad xf(x+1) = f^2(x) - 1.$$

[Jediným řešením je funkce $f(x) = x + 1$.]

Příklad 9

Nechť funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pro všechna přirozená čísla n vyhovuje nerovnosti $f(n+1) > f(f(n))$. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí $f(n) = n$.

Literatura

[1] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Abeceda řešení funkcionálních rovnic. MFI, roč. 22 (2013), č. 4.