

Příloha časopisu  
**MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA**  
Ročník 35 (2026), číslo 2

Úlohy I. kola (domácí část)  
76. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

**A–I–1**

Kolem kulatého stolu sedí 76 rytířů. Každý z nich má právě čtyři spojence, a to dva nejbližší sousedy po levici a dva nejbližší sousedy po pravici. Kolika způsoby lze rytíře rozdělit do dvou skupin, aby každý rytíř měl ve své skupině právě dva spojence?

*(Jozef Rajník)*

**A–I–2**

Každá ze tří přímek dělí daný kruh na dvě úseče, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 1. Tato trojice přímek dělí kruh na sedm částí. Dokažte, že obsah některé části je roven součtu obsahů jiných dvou nebo tří (různých) částí.

*(Tomáš Bárta)*

**A–I–3**

V trojúhelníku  $ABC$  jsou střed kružnice vepsané a těžiště stejně vzdálené od přímky  $BC$ . Dokažte, že poloměr kružnice připsané straně  $BC$  je roven velikosti výšky z vrcholu  $A$ . (Kružnice připsaná straně  $BC$  je kružnice, která se dotýká strany  $BC$  a polopřímek opačných k  $BA$  a  $CA$ .)

*(Zdeněk Pezlar)*

**A–I–4**

Najděte všechny dvojice prvočísel  $p, q$  takové, že  $p > q$  a platí

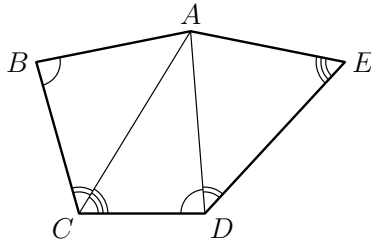
$$(p + q + 1)(n(p - 1, q - 1) + 1) = 11pq.$$

Zde  $n(a, b)$  označuje nejmenší společný násobek čísel  $a$  a  $b$ .

*(Tomáš Jurík)*

**A–I–5**

V konvexním pětiúhelníku  $ABCDE$  platí  $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC|$ ,  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EDA|$  a  $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCA|$ . Dokažte, že  $CD \parallel BE$ .



(Patrik Bak)

**A–I–6**

Pro kladné celé číslo  $m$  označme  $g(m)$  nejmenší počet geometrických posloupností, mezi jejichž členy jsou zastoupeny všechny dělitele čísla  $m$ . Určete všechna kladná celá čísla  $n$ , pro která platí  $g(n!) = g((n+1)!)$ . Řešte pro geometrické posloupnosti a) s racionálními kvocienty, b) s reálnými kvocienty.

(Zdeněk Pezlar)

## KATEGORIE B

**B–I–1**

Určete všechny kvadratické trojčleny  $f(x) = x^2 + px + q$  s reálnými koeficienty  $p, q$ , pro něž platí  $f(p) - q = f(q) - p = 2$ .

(Jaroslav Švrček)

**B–I–2**

Tabulku  $3 \times 3$  vyplníme devíti navzájem různými prvočísly tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci měl stejnou číslici na místě jednotek. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet všech čísel v tabulce?

(Tomáš Jurík a Tomáš Bárta)

**B–I–3**

Na stranách  $AB, BC, CD, DA$  pravoúhelníku  $ABCD$  jsou po řadě zvoleny body  $K, L, M, N$  tak, že  $KM \perp LN$ . Dokažte, že obsah čtyřúhelníku s vrcholy ve středech stran čtyřúhelníku  $KLMN$  není menší než jedna čtvrtina obsahu pravoúhelníku  $ABCD$ .

(Jaroslav Švrček a Jaromír Šimša)

**B–I–4**

Označme  $D(a, b)$  největší společný dělitel kladných celých čísel  $a, b$  a  $n(a, b)$  jejich nejmenší společný násobek. Určete všechna kladná celá čísla  $m$ , pro která platí  $D(25, m) + n(26, m + 1) = 2027$ .

(Tomáš Jurík)

**B–I–5**

Z číslic 0, 1, 2, 3, 6 a 7 sestavíme všechna možná šestimístná čísla, která obsahují každou z nich, a každé takové číslo zapíšeme na jinou kartičku. Rozhodněte, zda je možné rozdělit kartičky na sedm hromádek se stejnými součty čísel.

(Jana Kopfová)

**B–I–6**

Nechť  $M$  je střed základny  $AB$  rovnoramenného lichoběžníku  $ABCD$ . Označme  $K$  druhý průsečík přímky  $DM$  s kružnicí  $k$  opsanou danému lichoběžníku a  $P$  průsečík tečny kružnice  $k$  v bodě  $K$  s přímkou  $AB$ .

- Dokažte, že body  $C, M, K, P$  leží na téže kružnici.
- Dokažte, že přímka  $BD$  je tečnou kružnice opsané trojúhelníku  $BCP$ .

(Zdeněk Pezlar a Patrik Bak)

## KATEGORIE C

**C–I–1**

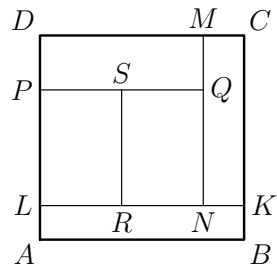
Sofie má 14 mincí, z nichž každá je buď zlatá, nebo stříbrná. Mince jsou uspořádané do řady tak, že v každé skupině 7 sousedních mincí je více zlatých než stříbrných. Kolik zlatých mincí může mít Sofie? Určete všechny možnosti.

(Patrik Vrba)

**C–I–2**

Čtverec  $ABCD$  složený z  $n \times n$  jednotkových čtverečků (kde  $n \in \mathbb{N}$ ) je jako na obrázku rozstříhán na pět pravouhelníků  $ABKL, KCMN, MDPQ, PLRS, RNQS$  stejného obvodu. Stříhy jsou vedeny po stranách jednotkových čtverečků. Určete nejmenší  $n$ , pro které je takové rozstříhání možné.

(Jaroslav Zhouf)



**C–I–3**

Najděte nejmenší kladné celé číslo  $n$ , které má aspoň dva různé prvočinitele a které je násobkem součtu svého nejmenšího a největšího prvočinitele.

*(Patrik Vrba a Patrik Bak)*

**C–I–4**

Pro reálná čísla  $a, b, c$  platí

$$(a + b)^2 \geq (b + c)^2, \quad (a - b)^2 \leq (b - c)^2, \quad a > b > c.$$

Kolik nejvíce z čísel  $a, b, c$  může být záporných?

*(Mária Dományová)*

**C–I–5**

V lichoběžníku  $ABCD$ , kde  $AB \parallel CD$  a  $|AB| > |CD|$ , označme  $K, L$  po řadě středy stran  $AB, BC$ . Dále označme  $M$  průsečík úseček  $AL$  a  $CK$ . Dokažte, že přímka  $DM$  dělí lichoběžník  $ABCD$  na dvě části o stejném obsahu.

*(Tomáš Jurík)*

**C–I–6**

Kuchař vaří devět jídel. Na každý z pěti následujících dnů sestaví jídelní lístek obsahující ne nutně stejný počet jídel. Musí zaručit, aby si libovolných pět různých jídel z těchto devíti bylo možné během těchto pěti dnů v nějakém pořadí objednat (každý den jedno jídlo). Určete nejmenší možný součet počtů jídel ze všech pěti jídelních lístků.

*(Josef Tkadlec)*