Ústřední kolo 75. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 75. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádala ve dnech 15.–18. března 2026 jihomoravská krajská komise Matematické olympiády ve spolupráci s Gymnáziem Brno, tř. Kpt. Jaroše, a s přispěním řady partnerů a sponzorů. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

Všichni soutěžící, členové Ústřední komise komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu *Avanti* v centru Brna, kde proběhla i celá soutěž. Slavnostní zahájení proběhlo 15. března ve Hvězdárně a planetáriu Brno za účasti představitelů MŠMT, kraje i města. V jeho průběhu udělili představitelé České matematické společnosti a Nadace Qminers Cenu Cantor za mimořádný přínos při přípravě účastníků MO *Mgr. Zbyňku Vrbovi* z Gymnázia Český Krumlov, *Jitce Putnarové* ze Základní školy Litoměřice, Boženy Němcové a *PaedDr. Josefu Kubešovi* z Gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí. Výsledky ústředního kola pak byly vyhlášeny ve středu 18. března ve Sněmovním sále města Brna.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 51 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 7 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny – 16. a 17. března, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku města. Druhý den to pak byla návštěva Mendelova muzea a slavnostní večeře U Královny Elišky.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům IV. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 18. března dopoledne. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů, zvláště pak *Mgr. Viktoru Ježkovi*, tajemníkovi krajské komise MO, *RNDr. Jiřímu Hermanovi*, předsedovi krajské komise MO a *Mgr. Tomáši Nečasovi*, řediteli pořádajícího gymnázia, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Podle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno jedenáct vítězů ústředního kola, absolutními vítězy se pak stali *Erik Ježek* ze Smíchovské SPŠ a G v Praze 5 a *Veronika Menšíková* z Arcibiskupského G v Praze 2 se ziskem 40 bodů. Dále bylo oceněno 14 úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách 75. ročníku MO. Zde najdete také vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (16. března)

1. Pro kladná reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva ze tří součtů $x+y$, $y+z$, $z+x$ jsou aspoň 10. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu zbývajícího součtu. (*Patrik Bak*)

2. Nechť T je těžiště ostroúhlého trojúhelníku ABC. Na kratším oblouku BC kružnice jemu opsané je dán bod P. Označme P' patu kolmice z bodu P k úsečce BC. Dále označme X průsečík přímky $P'T$ a rovnoběžky s BC vedené bodem A. Nakonec označme S střed úsečky PX. Dokažte, že

$$|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|.$$

(*Michal Janík*)

3. Řekneme, že skupina několika lidí je *trojitá*, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo $k \geq 3$, pro které existuje kladné celé číslo n takové, že z každé trojité skupiny s alespoň n lidmi lze vybrat alespoň k lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každí dva sousedé znají. (*Jozef Rajník*)

2. soutěžní den (17. března)

4. Nechť a, b jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo

$$a^2 + b^2 + 2$$

je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.

(*Dominik Martin Rigász*)

5. Nechť $\mathcal{P} = (a_1, a_2 \ldots, a_{2026})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \ldots, 2026$. Řekneme, že index $i \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$ je *dobrý*, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{gathered} a_i, \\ a_i - a_{i+1}, \\ a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ \vdots \\ a_i - a_{i+1} + \ldots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ a_i - a_{i+1} + \ldots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025} \end{gathered}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, tj. klademe $a_{j+2026} = a_j$ pro každé celé j. Označme $n(\mathcal{P})$ počet dobrých indexů pořadí $\mathcal{P}$. Určete nejmenší možné i největší možné $n(\mathcal{P})$.

(*Jakub Krivošík*)

6. Nechť $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O, jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímky AB, CD a EF vymezují trojúhelník Δ_1 a přímky BC, DE a FA vymezují trojúhelník Δ_2. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům Δ_1 a Δ_2 jsou souměrně sdružené podle bodu O.

(*Michal Janík*)

Všichni vítězové a nejlepší úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu v Číně a Středoevropskou matematickou olympiádu ve Slovinsku. Nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozváni na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek