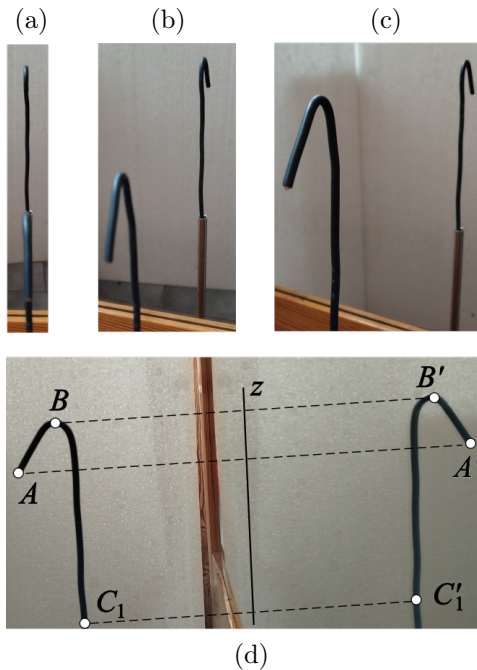


Paradox komerčního zrcadla

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Nedávno publikovaný článek [2] měl obsahovat i obr. 1, fotografie zahnutého drátu a jeho zrcadlového obrazu. Překvapivý výsledek na snímku (d) způsobil sepsání tohoto příspěvku.



Obr. 1 Snímky ohnutého drátu a jeho obrazu v zrcadle

Co je na obrázku zvláštního? Zatímco u situací (a) až (c) pozorujeme odpovídající perspektivní zkreslení, na snímku (d) se obraz drátu v zrcadle jeví trochu větší nebo aspoň silnější než originál. Vzniká pocit, že se nachází blíže než předmět, jehož je obrazem. Opak má být pravdou. Jedná se o zrakovou iluzi nebo efekt způsobený zrcadlem či digitálním zpracováním snímku?

Jednou z příčin by mohla být okolnost, že reflexní vrstva (komerčních) zrcadel je překryta skleněnou deskou. V učebnicích se neuvádí, jak průchod světla tímto skleněným prostředím ovlivňuje polohu a tvar zrcadlového obrazu. Avšak i s běžně dostupnými pomůckami lze jev vyšetřit. Ukážeme si, jak na to.

Vyjádřeno přesněji, popíšeme průzkum zobrazování takovým zrcadlem simulací chodu paprsků pomocí nástrojů dynamické geometrie.

Jak se vyrábí komerční zrcadlo a z čeho se skládá

Na stránkách firmy Alfaram se dočteme, že se „zrcadla určená k dennímu užívání vyrábějí především z plaveného skla, které musí mít dokonale hladký a nezkraslený povrch. Jakékoli nedokonalosti by mohly ovlivnit odražený obraz, takže by byl nespolehlivý. Suroviny použité k výrobě se roztaví v peci a poté se rovnoměrně nalijí do hladkého povrchu, který se následně ochladí.

Když je příslušná skleněná tabule připravena, je omyta speciálními chemickými sloučeninami a poté je aplikován reflexní povlak. Nejčastěji se k tomu používá stříbro nebo chrom. Nakonec je na zrcadlo umístěna ochranná vrstva. Dříve se skládala z mědi a olova, nyní se od tohoto řešení z ekologických důvodů upouští. Proti poškození a stárnutí se užívají speciální laky, které jsou nejen šetrnější k životnímu prostředí, ale prokazatelně mají velký vliv na pevnost zrcadel a zároveň je chrání před vlhkostí a vysokými teplotami.“

Zrcadlo, kterým se budeme zabývat, se skládá ze tří hlavních částí: ploché skleněné tabule – tzv. *krycí vrstvy zrcadla*, reflexního povlaku a ochranné vrstvy. Pro jednoduchost předpokládáme, že skleněná vrstva je planoparalelní a homogenní s indexem lomu n . Obklopuje ji vzduch, jehož index lomu je 1. Reflexní vrstvu ztotožňujeme s rovinou σ_r . Z vnějšku zrcadlové sklo ohraničuje rovina σ_s , která odděluje předmětový prostor od obrazového.

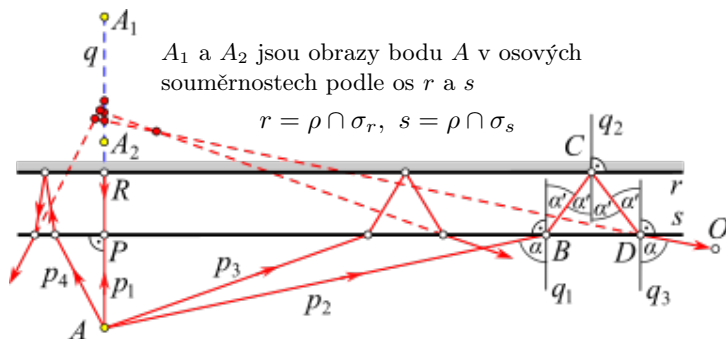
Odras paprsků z bodového zdroje světla na komerčním zrcadle

Ideální zrcadlo tvořené pouze reflexní rovinou σ_r zobrazuje bod A do bodu A' souměrně sdruženého s A podle σ_r . U komerčního zrcadla nutno

brát v úvahu i lom na rozhraní σ_s . Obr. 2 představuje situaci v rovině $\rho = APB$, kde P je pata kolmice z A na σ_s , $B \in \sigma_s$ a $B \neq P$. Normála $q = AP$ protíná rovinu σ_r v bodě R a průsečnice roviny ARB s rovinami σ_r a σ_s jsou po řadě r a s .

Paprsek p_1 , dopadající z A na σ_s kolmo, nemění při přechodu do skla směr a v bodě R se odrazí do protisměru. Paprsek p_2 , jenž dopadá na σ_s v bodě B , se lomí. Úhel lomu α' je dán vztahem

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right), \quad \text{kde } \alpha \text{ je úhel dopadu.} \quad (1)$$



Obr. 2 Zobrazení paprsků z bodu A v rovině dopadu ρ

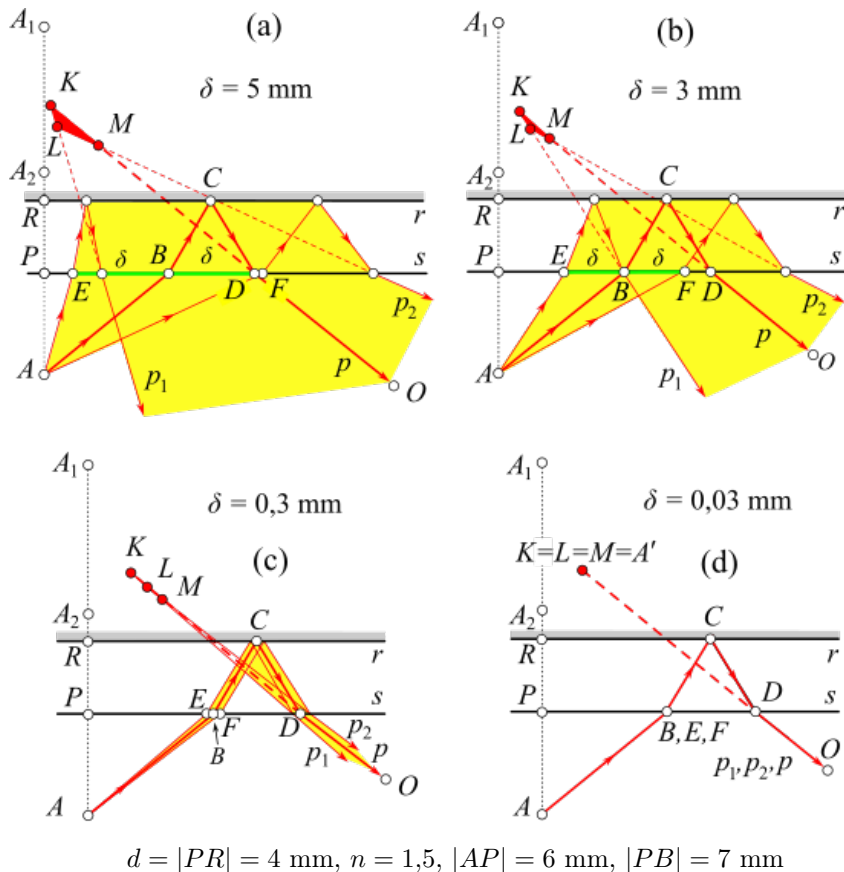
Lomený paprsek se pak odrazí v bodě C od reflexní roviny σ_r a nakonec se lomí v bodě $D \in \sigma_s$ do předmětového prostoru. Po lomu svírá s normálou q_3 opět úhel α , neboť $\arcsin(n \sin \alpha') = \alpha$.

Vidíme, že zde na rozdíl od odrazu na ideálním zrcadle dochází k posunutí odraženého paprsku, jež roste s velikostí úhlu α . Každé dva ze čtyř paprsků v rovině ρ mají jiný zdánlivý průsečík, a tak není obraz bodu A v prostoru jednoznačně určen.

Simulace vytvoření obrazu bodu

Model pro průzkum chodu paprsků byl vytvořen pomocí programu *Cabri Geometry II Plus*, alternativou může být i zdarma dostupná *GeoGebra*. Tloušťku d zrcadlového skla na nákrese jsme zvolili 2 cm, aby bylo dobře vidět detaily konstrukcí. Obrázky v článku většinou vznikly úpravami vektorových kopií Cabri-konstrukcí v programu *Inkscape*. Podle potřeby jsme rozměry z konstrukcí převedli na hodnoty, jež odpovídají tloušťce $d = 4$ mm běžně užívaných nástěnných zrcadel.

K sestrování paprsků, lomených čar typu $ABCO$ z obr. 2, je výhodné uložit si makrokonstrukci **K1**. Vstupními objekty mohou být například¹⁾ přímky s, r , index lomu n a body A, B umístěné v souladu s obr. 2. Jako výstup zvolíme úsečky AB, BC, CD a přímku DO .



Obr. 3 Simulace zobrazování bodu zrcadlem

Vraťme se nyní k úvahám z odstavce 2 a pokusme se lokalizovat polohu obrazu A' bodu A , nachází-li se receptor (oko, nebo objektiv fotoaparátu) v místě O (obr. 3). Vyjdeme z hypotézy, že „bodem“ A' je množina všech

¹⁾Výběr a pořadí vstupních hodnot závisí na způsobu, jak byl obrázek sestaven.

Hodnoty parametru κ můžeme měnit. Zvolíme-li velmi malé κ , můžeme detailně vyšetřit polohy bodu A' v blízkosti kolmého dopadu paprsků. Při volbě dostatečně velké hodnoty κ , lze umístit bod B i mimo nákresu²⁾, což umožní průzkum množiny \mathcal{A} pro $\alpha \rightarrow 90^\circ$.

K demonstraci vykreslení poloh bodu A' poslouží nabídka *Stopa*, nástrojem *Množina* zobrazíme celou čáru TH . Jejím obrazem v souměrnosti s osou q je zbývající část množiny \mathcal{A} , čára TG .

Z konstrukce bodů A' plyne, že množina \mathcal{A} je obalovou křivkou všech odražených paprsků, příemek $A'D$.

Bod T představuje umístění bodu A' pro $\alpha = 0$. Pokusili jsme se jej najít zobrazením délky $|A_2A'|$ pomocí nástroje *Vzdálenost a délka* a nastavením $B = P$. Při posunutí B do P na doraz program tuto délku nezobrazil, a tak jsme ji určovali přibližováním bodu B k bodu P při malých hodnotách κ . Pro $d = 2$ cm, $n = 1,5$, $a = 3$ cm a $\kappa = 0,0005$ jsme postupně zjistili³⁾, že pro $\alpha \doteq 0,1^\circ$ je $|A_2A'| = 2,6666428593$ cm, pro $\alpha \doteq 0,05^\circ$ je $|A_2A'| = 2,6666639704$ cm a pro $\alpha \doteq 0,01^\circ$ je $|A_2A'| = 2,6666664592$ cm.

Zjištěné hodnoty vedou k domněnce, že $|A_2T| = 2,66$ cm, resp. pro $d = 4$ mm a $a = 6$ mm obdržíme $|A_2T| = 5,33$ mm.

S rostoucí velikostí úhlu α se bod A' vzdaluje od normály a zároveň se přibližuje k přímce $m \parallel s$, která prochází bodem A_2 . Body H a G jsou limitní polohy bodu A' pro $\alpha \rightarrow 90^\circ$. Do množiny \mathcal{A} již nepatří. Vzhledem k jejich symetrii podle normály q jsou určeny vzdáleností $|A_2H|$. Tu jsme nejprve určovali (při nastavení $d = 2$ cm, $n = 1,5$, $a = 3$ cm a $\kappa = 500$) vzdalováním bodu B až do 30 metrů od P , čemuž odpovídá $\alpha \doteq 89,9^\circ$. Ukázalo se, že program měl při hodnotách α blízkým 90° potíže s výpočtem délky $|A_2A'|$, a tak bylo možné určit $|A_2H|$ jen s přesností na tři platné cifry, $|A_2H| \doteq 3,58$ cm.

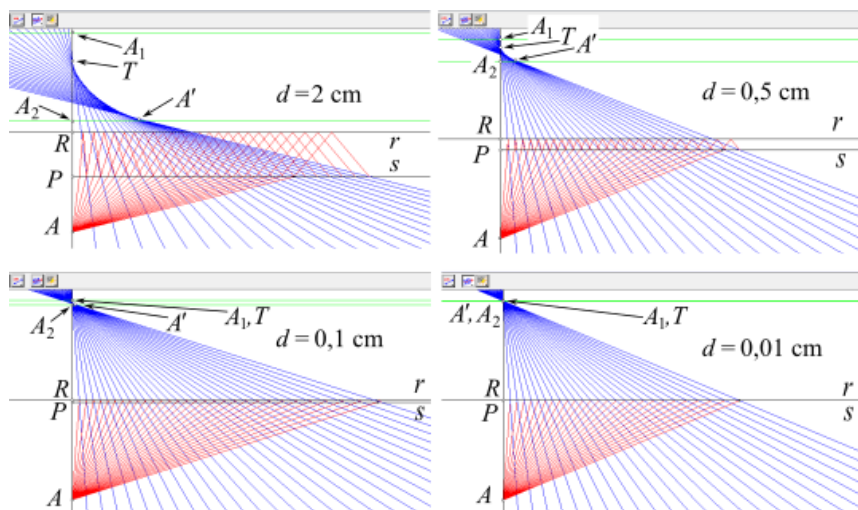
Hodnotu $|A_2A'|$ však lze v blízkosti bodu H nahradit délkou $|A_2A_x|$, kde $A_x \in A'D \cap m$, obdržíme $|A_2H| \doteq 3,5777$ cm. Pro $d = 4$ mm a $a = 6$ mm je tedy $|A_2A'| \doteq 7,155$ mm.

Obr. 5 znázorňuje, jak se mění svazek paprsků při zmenšování tloušťky skleněné krycí vrstvy zrcadla. Každý ze čtyř snímků obrazovky zachycuje vytvoření stop paprsků pro posloupnost poloh bodu B . Ke zobrazení po-

²⁾ Cabri s objekty pracuje v kartézské soustavě souřadnic pomocí analytické geometrie a na pracovní plochu zobrazuje jen část kartézské roviny. Hodně vzdálený bod B na obrazovce nevidíme, ale přemísťovat jej pohybem bodu X můžeme.

³⁾ Cabri určuje číselné hodnoty až na 10 desetinných míst. Uvádíme je úplně, máme-li na mysli matematické objekty. V geometrické optice je taková přesnost absurdní, vzdálenosti 10^{-10} cm patří do mikrofyziky.

sloužily nástroje *Stopa* a *Pohyb objektu*. Kvůli přehlednosti obrázku byl pohyb zastavován většinou kolem hodnoty $\alpha = 70^\circ$. Při $d = 0,1$ mm se zrcadlo chová téměř jako ideální.



Obr. 5 Závislost svazku odražených paprsků na tloušťce d , $|AR| = \text{konst.}$

Výpočet polohy bodů T , H

Na obr. 6 je N střed úsečky BD . Z pravoúhlého trojúhelníku BCN pomocí základních vztahů a rovnosti (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x = |BD| &= 2|BN| = 2|CN| \cdot \tan \alpha' = \\ &= \frac{2d \sin \alpha'}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha'}} = \frac{2d \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (2)$$

Označme po řadě A_x a A_y průsečíky přímky $A'D$ s přímkami m a q . Z pravoúhlých trojúhelníků DA_yP a ABP zjistíme

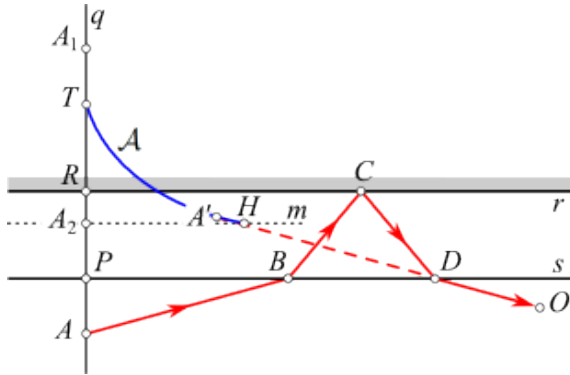
$$|PA_y| = (|PB| + x) \cotg \alpha, \quad |PB| = a \tan \alpha.$$

Odtud s využitím (2) plyne

$$|PA_y| = a + \frac{2d \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{a} \quad |PT| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} |PA_y| = a + \frac{2d}{n},$$

Důsledek 2

Je-li vzdálenost bodu A od zrcadla menší než tloušťka d krycí vrstvy, může se jeho obraz A' nacházet uvnitř skleněné desky zrcadla, tzn. před reflexní vrstvou zrcadla, obr. 8.



Obr. 8 Obraz bodu A se nachází v krycí vrstvě zrcadla

Závěr

Seznámili jsme se s principy vytváření obrazu u zrcadel denní potřeby. Článek může posloužit i jako námět na zajímavou činnost s případným experimentálním ověřením.

Pokud jde o úvodní snímek, výsledky jeho měření ani „rekonstrukce“ počítačovou simulací neprokázaly, že by byl obraz větší než předmět.

Literatura

- [1] *Alfaram*: ABC zrcadla, stránky firmy Alfaram. Dostupné na: <https://alfaram.cz/blog/zpravy/abc-zrcadla-jak-vypada-proces-vyroby-zrcadel>.
- [2] *Leischner, P.*: O zobrazování rovinným zrcadlem. MFI, roč. 34 (2025), č. 3, s. 203–210.