

Zajímavé matematické úlohy

V dalším čísle našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 9. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 309

Průsečky rovnoběžek se stranami trojúhelníku ABC dělí zbývající strany na n shodných částí. Tyto rovnoběžky spolu se stranami dělí trojúhelník na shodné malé trojúhelníky s jednotkovým obsahem. Určete všechna přirozená čísla n , pro něž lze trojúhelník ABC rozřezat na tři trojúhelníky, jejichž vrcholy leží v dělicích bodech stran AB , BC , CA nebo ve vrcholech A , B , C a současně jejich obsahy jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla.

Jaroslav Zhouf

Úloha 310

Určete všechny trojice (a, b, c) nenulových reálných čísel pro něž současně platí:

- rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

má tři různé nenulové reálné kořeny, z nichž jeden je 10,

- převrácené hodnoty těchto kořenů jsou současně kořeny rovnice

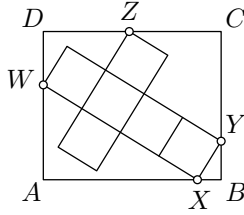
$$4x^3 + \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{b}x + \frac{1}{c} = 0.$$

Zdeněk Pezlar

V následující části uvádíme řešení úloh 305 a 306, jejichž zadání jsme zveřejnili v posledním (čtvrtém) čísle loňského (34.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 305

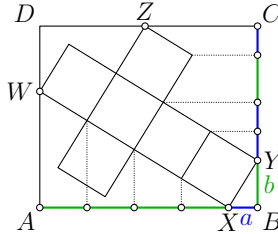
Do obdélníku $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 30$, $|BC| = 25$ jsme umístili síť krychle, která se dotýká jeho stran v bodech X , Y , Z a W podle obrázku.



Vypočítejte délku strany krychle a rozhodněte, zda lze tuto síť umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku.

Tomáš Bárta

Řešení. Označme $|BX| = a$, $|BY| = b$, Z obr. 1 plyne $30 = |AB| = a + 4b$, $25 = |BC| = 3a + 2b$.



Obr. 1

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $a = 4$, $b = 13/2$. Délka hrany krychle je pak podle Pythagorovy věty rovna

$$|XY| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{233}.$$

Pokud je možno síť krychle umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku, je délka úsečky WX kratší než nejdelší strana obdélníku, tedy AB . Platí však

$$|WX| = 4|XY| = 2\sqrt{233}$$

a

$$|WX| = 2\sqrt{233} > 2\sqrt{225} = 2 \cdot 15 = 30 = |AB|,$$

tedy síť krychle nelze výše popsaným způsobem do obdélníku umístit.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Michał Fronczek* a *Bar-tosz Wieczorek*, všichni II LO SS Tarnowskie Góry (Polsko), *Tereza Reimová* a *Tereza Havelková*, obě G Jablonec nad Nisou, U Balvanu.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

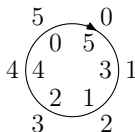
Úloha 306

U kulatého stolu sedí n ($n \geq 3$) svatebních hostů. Číšník přinesl kulatý ták, na němž je n různých zákusků rozmístěných do kruhu. Ukázalo se, že každý host je alergický právě na jeden zákusek, každý na jiný. Najděte všechna n s následující vlastností:

Jsou-li zákusky na tácu rozmístěny do kruhu jakkoliv, číšník může položit ták doprostřed stolu tak, aby před každým hostem byl na tácu zákusek, na nějž není alergický.

Josef Tkadlec

Řešení. Označme hosty sedící kolem kulatého stolu ve směru hodinových ručiček netradičně $0, 1, 2, \dots, n-1$, ať nemáme problém s popisem pomocí zbytků při celočíselném dělení.



Nechť číšník donese zákusky na tácu a postaví jej doprostřed stolu tak, že před každým hostem je jeden zákusek. Označme $\pi(i)$ hosta, který je alergický na zákusek před hostem i . Jelikož každý host je alergický na právě jeden zákusek a každý na jiný, je π permutace množiny $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. (Například obrázek odpovídá permutaci $\pi = (5, 3, 1, 2, 4, 0)$ a znamená, že host 5 je alergický na zákusek před hostem 0, host 3 je alergický na zákusek před hostem 1 atd.)

Nejprve ukážeme, že pro n sudé může číšník otočit ták o nějakých j pozic ($j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) ve směru hodinových ručiček tak, že se před každým hostem po tomto otočení objeví zákusek, na který není alergický. (Na obrázku je to např. $j = 3$.) Sporem předpokládejme, že to není možné. Potom pro každé j existuje takové číslo i , že se zákusek s číslem $\pi(i)$ objeví před hostem $(i + j) \bmod n$, který je na něj alergický, a bude tak platit

$$\pi(i) \equiv i + j \pmod{n}.$$

(Například na prvním obrázku je $n = 6$, pro $j = 0$ je takové $i = 4$ (před hostem 4 leží zákusek, na který je alergický), pro $j = 1$ je $i = 5$ (při otočení tácu o jednu pozici ve směru hodinových ručiček se před hostem 0 objeví zákusek, na který je alergický on, tento zákusek původně stál na pozici 5), pro $j = 2$ je $i = 1$ atd.) Bude tak platit

$$\pi(i) - i \equiv j \pmod{n}.$$

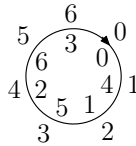
Přítom zřejmě platí, že různým j odpovídají různá čísla i (při dvou různých otočeních se před stejným hostem nemůže objevit dvakrát zákusek, na který je alergický). Sečtením všech těchto ekvivalencí dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\pi(i) - i) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} j \pmod{n}.$$

Jelikož π je permutace, je na levé straně této ekvivalence 0, platí tak

$$0 \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n},$$

tedy n dělí číslo $n(n-1)/2$, což je spor, protože toto číslo je dělitelné n jen v případě, že $(n-1)/2$ je celé, tedy n je liché číslo.



Pro n liché se číšníkoví otočení tácu nemusí podařit, uspořádejme zákusky na tácu „ob jedno místo“, tj. zákusek, na který je alergický host i , leží na místě $(2i \bmod n)$. (Na obrázku je toto uspořádání pro $n = 7$.) Potom při otočení tácu o j pozic ve směru hodinových ručiček bude před zákuskem, na který je alergický, sedět host číslo $(n - j) \bmod n$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Michał Fronczek* a *Bar-tosz Wieczorek*, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Pavel Calábek