

Úloha o bedničkách

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V letech 1968–1970 odvysílala Československá televize (ČST) více než dvacet dílů zábavného pořadu (dnes talkshow) „Hovory H“ vynikajícího českého herce a spisovatele *Miroslava Horníčka* (1918–2003). Ten se podílel také na tvorbě většiny scénářů k jednotlivým dílům tohoto divácky atraktivního pořadu ČST. Ve 22. dílu „Hovorů“, který byl uveden v roce 1970, vyzval Miroslav Horníček diváky k řešení jedné zajímavé logické „úlohy o bedničkách“:

Mezi šesti bedničkami, z nichž pět má stejnou hmotnost a jedna z nich má hmotnost jinou, určete pomocí trojího vážení na digitálních vahách, která z bedniček má jinou hmotnost. (Lze stejnou úlohu řešit i pro sedm bedniček, mezi nimiž má jedna jinou hmotnost než ostatních šest?)

Dále uvádíme jedno z možných řešení (strategii řešení) „úlohy o bedničkách“. Pokud vás však tato úloha zaujala, pokuste se *nejprve sami* o její řešení, až poté se vraťte k jejímu níže uvedenému řešení.

Řešení úlohy o bedničkách.

Označme jednotlivé bedničky **1, 2, 3, 4, 5, 6**. Nejprve zvážíme společně např. první tři bedničky (**1, 2 a 3**). Jejich hmotnost označíme m_1 . Ve druhém kroku zvážíme společně bedničky **3 a 4**. Zjištěnou hmotnost označíme m_2 . Obě vážení zaznamenáme symbolicky:

$$\begin{aligned}m_1 &= \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}, \\m_2 &= \quad \quad \mathbf{3} + \mathbf{4}.\end{aligned}$$

Pokud $2m_1 = 3m_2$, mají bedničky **1–4** stejnou hmotnost. Všechny čtyři jsou tedy pravé, a hmotnost m každé z nich je proto $m = m_1/3 = m_2/2$. Jinou hmotnost (je „falešná“) má tedy buď bednička **5**, nebo bednička **6**. Třetím vážením pak snadno zjistíme, která z nich je falešná. Zvážíme samostatně bedničku **5**, tj. symbolicky $m_3 = \mathbf{5}$. Pokud $m_3 = m$, je falešná bednička **6**. V opačném případě je falešná bednička **5**.

Je-li však $2m_1 \neq 3m_2$, je falešná některá z bedniček **1–4** (obě bedničky **5 a 6** jsou tedy pravé). V tomto případě určíme třetím vážením hmotnost bedniček **2 a 5** dohromady, tj. symbolicky $m_3 = 2 + 5$.

Platí-li $m_3 = m_2$, je falešná bednička **1**.

Pokud však $m_3 \neq m_2$, musíme uvažovat dvě možnosti:

(i) Je-li $3m_3 = 2m_1$, je falešná bednička **4**.

(ii) Je-li $3m_3 \neq 2m_1$, je falešná buď bednička **2**, nebo bednička **3**.

V případě (ii) jsou tedy pravé (kromě bedniček **1, 5 a 6**) buď obě bedničky **3 a 4**, nebo obě bedničky **2 a 4**, což však znamená, že právě jedna ze zvážených hodnot m_2, m_3 je rovna hmotnosti $2m$ dvou pravých bedniček. Platí tedy:

Bednička **2** je falešná, právě když $m_2 = 2m$, tj. právě když pro její hmotnost f platí $f = m_1 - 2m = m_3 - m$, což po úpravě dává

$$2m_1 = m_2 + 2m_3.$$

Analogicky, bednička **3** je falešná, právě když $m_3 = 2m$, tj. právě když pro její hmotnost f platí $f = m_1 - 2m = m_2 - m$. Odtud po úpravě máme

$$2m_1 = 2m_2 + m_3.$$

Dodejme ještě, že součty $m_2 + 2m_3$ a $2m_2 + m_3$ jsou díky předpokladu $m_3 \neq m_2$ různé, takže nastane právě jedna z odvozených možností.

Tím jsme probrali všechny možnosti, jak mezi šesti bedničkami, z nichž jedna má jinou hmotnost než ostatních pět, lze pomocí trojího vážení na digitálních vahách nalézt falešnou bedničku (s odlišnou hmotností).

Na konkrétním příkladu se můžete kontrolně přesvědčit o správnosti navrženého postupu, a to pro konkrétních šest bedniček např. s hmotnostmi v pořadí 8, 8, 9, 8, 8, 8, popř. 8, 9, 8, 8, 8, 8.

Poznámka. Tuto logickou úlohu bylo mj. možno uplatnit jako vhodnou průpravu (doplňkovou úlohu) k úloze C–I–6 v aktuálním – 75. ročníku MO (o 21 buchtách, z nichž 10 je naplněno povidly a ostatních 11 tvarohem).

Závěrem uvádíme pro zájemce formulaci analogické úlohy pro 7 bedniček:

Mezi sedmi bedničkami, z nichž šest má stejnou hmotnost a jedna z nich má hmotnost jinou, určete pomocí trojího vážení na digitálních vahách, která z bedniček má jinou hmotnost.

Nejllepší řešení této úlohy, případně jiná řešení úvodní úlohy, která zašlete do redakce časopisu Matematika–fyzika–informatika, rádi zveřejníme.