

Mnohočleny v soutěži Matematický klokan

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezinárodní soutěž Matematický klokan je již více než třicetiletá, když v červnu 1994 učitelé 10 zemí založili ve Štrasburku asociaci *Kangourou Sans Frontières* (AKSF), jejíž stanovy byly registrovány v Paříži v lednu 1995. Během let se v soutěži objevilo mnoho zajímavých úloh, které pokrývaly celou šíři výuky mnohočlenů na střední škole. Mohou sloužit jako doplňující učivo v hodinách matematiky, pro přípravu k maturitní zkoušce či jako úvod do problematiky mnohočlenů pro žáky řešící matematické soutěže. S úplnými řešeními některých úloh, rozdělených podle témat, vás seznámíme. Úlohy vesměs pocházejí z kategorie Student; v závorce je uveden rok, ve kterém soutěž proběhla, podtržena je vždy správná odpověď.

1. Práce s výrazy

V první části uvádíme příklady, které se týkají mnohočlenů spíše okrajově. Jsou založeny na manipulaci s výrazy, násobení a dělení mnohočlenů, znalosti základních vzorců pro práci s výrazy, včetně práce se symetrickými mnohočleny.

Příklad 1 (2002)

Pro reálná čísla a , b , c platí

$$a + b + c = 7; \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}.$$

Jaká je hodnota $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$?

- (A) $\frac{19}{10}$ (B) $\frac{17}{10}$ (C) $\frac{9}{7}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{10}{7}$

Řešení. Podle zadání platí

$$\begin{aligned} 7 \cdot \frac{7}{10} &= \frac{7}{a+b} + \frac{7}{b+c} + \frac{7}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = \\ &= 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a}. \end{aligned}$$

Odtud již snadno dostaneme

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}.$$

Příklad 2 (1996)

Nechť $r + \frac{1}{r} = 6$, potom $r^3 + \frac{1}{r^3}$ je rovno:

- (A) 15 (B) 18 (C) 96 (D) 198 (E) jiná odpověď

Řešení. Užitím vzorce pro třetí mocninu součtu dostáváme

$$r^3 + \frac{1}{r^3} = \left(r + \frac{1}{r}\right)^3 - 3\left(r + \frac{1}{r}\right) = 6^3 - 3 \cdot 6 = 6 \cdot 33 = 198.$$

Takové číslo r skutečně existuje, je kořenem rovnice $r^2 - 6r + 1 = 0$, která má dokonce dva reálné kořeny $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Příklad 3 (1996)

Reálné číslo x vyhovuje rovnici $x^2 - 4x + 2 = 0$. Určete hodnotu $x + \frac{2}{x}$.

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

Řešení. Snadno ověříme, že daná rovnice nemá kořen $x = 0$, proto vydělením nenulovým x dostaneme $x - 4 + 2/x = 0$, odkud $x + 2/x = 4$. Opět je potřeba si uvědomit, že taková x skutečně existují, například úvahou o kladném diskriminantu. Můžeme také rovnici vyřešit a vypočítat $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$.

Příklad 4 (2008)

Pro reálná čísla x, y, z platí $x + y + z = 1$ a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Hodnota $x^2 + y^2 + z^2$ je:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) není možno ji určit

Řešení. Z následující úpravy

$$0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz}$$

plyne $xy + xz + yz = 0$. Tedy

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 1 - 2 \cdot 0.$$

Pro úplnost ještě dodejme, že taková reálná čísla skutečně existují, jsou to například $x = y = 2/3, z = -1/3$.

Příklad 5 (2008)

Pro libovolné reálné číslo x označme $\sin x + \cos x = m$. Vyjádřete $\sin^4 x + \cos^4 x$.

- (A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ (B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ (C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ (D) m^4 (E) $m^4 + 1$

Řešení. Označme $a = \cos x$, $b = \sin x$. Potom $a^2 + b^2 = 1$. Dle vzorce pro součet druhých mocnin dostáváme $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = m^2 - 1$. Ještě jednou uijeme vzorec pro součet druhých mocnin a dostaneme

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1 - \frac{(1 - m^2)^2}{2}.$$

Příklad 6 (1995)

Mnohočlen $(x + y)^9$ je rozložen a uspořádán podle klesajících mocnin x . Druhý a třetí člen mají stejnou hodnotu pro $x = p$ a $y = q$, kde p, q jsou kladná čísla, jejichž součet je 1. Jaká je hodnota p ?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) jiná

Řešení. Užitím binomické věty dostáváme, že druhý člen výrazu je $9x^8y$, třetí člen je $36x^7y^2$. Podle zadání tak platí $9p^8q = 36p^7q^2$. Jelikož p a q jsou kladná čísla, dostáváme odtud $p = 4q$. Ovšem podle zadání také platí $q = 1 - p$, což spolu s předcházející rovnicí dává $p = \frac{4}{5}$, $q = \frac{1}{5}$.

Příklad 7 (1995)

Výraz $\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$ je roven:

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{13}$

Řešení. Menšenek je jistě větší než menšitel, daný výraz je kladný, užitím vzorců pro druhou mocninu součtu a rozdílu druhých mocnin tak platí

$$\begin{aligned} \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} &= \sqrt{\left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{7 + \sqrt{13} - 2\sqrt{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} + 7 - \sqrt{13}} = \\ &= \sqrt{14 - 2\sqrt{49 - 13}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Poznámka. Pro znalé se jedná o odvození tzv. Bhaskarových vzorců, které se užívají při úpravě surdických čísel.

Jiné řešení. Označme $r = \sqrt{7 + \sqrt{13}}$ a $s = \sqrt{7 - \sqrt{13}}$. Potom

$$r^2 + s^2 = 7 + \sqrt{13} + 7 - \sqrt{13} = 14 \quad \text{a} \quad rs = \sqrt{7^2 - 13} = 6.$$

Proto

$$(r - s)^2 = r^2 + s^2 - 2rs = 14 - 2 \cdot 6 = 2.$$

Jelikož zřejmě $r > s$, platí $r - s = \sqrt{2}$.

Příklad 8 (2004)

Číslo $\left(\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}\right)^2$ je

- (A) záporné (B) rovné nule (C) čtvrtou mocninou přirozeného čísla
(D) rovné $11\sqrt{2}$ (E) přirozený násobek čísla 5

Řešení. Jedná se o variantu předcházející úlohy, podobným výpočtem

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}\right)^2 = \\ & = 22 + 12\sqrt{2} - 2\sqrt{(22 + 12\sqrt{2})(22 - 12\sqrt{2})} + 22 - 12\sqrt{2} = \\ & = 44 - 2\sqrt{484 - 288} = 44 - 2 \cdot 14 = 2^4. \end{aligned}$$

2. Základní poznatky o mnohočlenech

V této části uvádíme příklady, které využívají základních poznatků o mnohočlenech, jako jsou výpočet hodnot, kořeny a dělitelnost kořenovým činitelem a Viětovy vztahy.

Příklad 9 (2013)

Pro lineární funkci f platí $f(2013) - f(2001) = 100$. Vypočtete hodnotu $f(2031) - f(2013)$.

- (A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

Řešení. Uvažujme lineární funkci $f(x) = ax + b$. Potom podle zadání platí $100 = f(2013) - f(2001) = a(2013 - 2001) = 12a$. Proto

$$f(2031) - f(2013) = a(2031 - 2013) = 18a = 3/2 \cdot 12a = 150.$$

Snadno si uvědomíme, že takové lineární funkce skutečně existují, jsou to všechny lineární funkce s koeficientem $a = 1/12$.

Příklad 10 (2014, mezinárodní verze)

Pro reálnou funkci $f(x) = ax + b$ platí $f(f(f(1))) = 29$ a $f(f(f(0))) = 2$. Určete a .

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení. Uvažujme lineární funkci $f(x) = ax + b$. Potom podle zadání platí

$$\begin{aligned} 29 &= f(f(f(1))) = f(f(a + b)) = f(a(a + b) + b) = \\ &= a(a(a + b) + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b, \\ 2 &= f(f(f(0))) = f(f(b)) = f(ab + b) = a(ab + b) + b = a^2b + ab + b. \end{aligned}$$

Odečtením těchto dvou vztahů dostaneme $a^3 = 27$, tedy $a = 3$. Pro úplnost ještě dodejme, že taková funkce skutečně existuje, platí pro ni $b = 2/13$.

Jiné řešení. Stejně jako v předcházejícím řešení si uvědomíme, že pro reálná čísla c, d a lineární funkci $f(x) = ax + b$ platí $f(d) - f(c) = a(d - c)$. Proto

$$\begin{aligned} 27 &= 29 - 2 = f(f(f(1))) - f(f(f(0))) = a(f(f(1)) - f(f(0))) = \\ &= a(a(f(1) - f(0))) = a(a(a)) = a^3 \end{aligned}$$

se stejným dokončením.

Příklad 11 (1997)

Jaký je součet všech koeficientů polynomu

$$W(x) = (x - 1997)(x - 1498)(x - 999)(x - 1) + 1?$$

- (A) 1997 (B) 1000 (C) 1 (D) 13 (E) 4996

Řešení. Součet všech koeficientů mnohočlenu je roven jeho hodnotě v bodě 1. Je tak roven

$$W(1) = (-1996) \cdot (-1497) \cdot (-998) \cdot 0 + 1 = 1.$$

Jiné řešení. Koeficienty můžeme ovšem také vypočítat a sečíst je. Dostaneme

$$W(x) = x^4 - 4495x^3 + 6\,487\,505x^2 - 2\,994\,997\,505x + 2\,988\,514\,495.$$

Příklad 12 (1995)

Rozvineme-li výraz $(2x - 1)^{1995}$ vzhledem k proměnné x , dostaneme:

$$a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \dots + a_1x + a_0$$

Součet koeficientů $a_{1995} + a_{1994} + \dots + a_1 + a_0$ je roven:

- (A) 0 (B) 1 (C) 1995 (D) -1 (E) 2

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladě je hledaná hodnota rovna hodnotě mnohočlenu v bodě 1, tedy $(2 \cdot 1 - 1)^{1995} = 1$.

Příklad 13 (1997)

Jaký je součet druhých mocnin všech reálných kořenů rovnice

$$x^{256} - 256^{32} = 0?$$

- (A) 8 (B) 4 (C) 512 (D) $65 \cdot 536$ (E) $2 \cdot 256^{32}$

Řešení. Jelikož $256 = 2^8$, je daná rovnice ekvivalentní $x^{256} = 2^{8 \cdot 32} = 2^{256}$ čili $|x| = 2$. Jejími reálnými kořeny jsou pouze ± 2 , tedy hledaný součet je $(-2)^2 + 2^2 = 8$.

Příklad 14 (1996)

Každá algebraická rovnice lichého stupně n ($n \geq 3$, $a_n \neq 0$)

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0 = 0$$

- (A) má alespoň jeden reálný kořen (B) má alespoň dva reálné kořeny
 (C) má vždy tři reálné kořeny (D) nikdy nemá žádný reálný kořen
 (E) nemá žádný reálný kořen, pokud není $a_0 = 0$

Řešení. Jedná se o základní poznatek.

Příklad 15 (2018)

Čísla m a n jsou kořeny rovnice $x^2 - x - 2018 = 0$. Určete hodnotu součtu $m^2 + n$.

- (A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

Řešení. Velmi hezký příklad, v zadání opravdu není chyba a výraz $m^2 + n$ je nesymetrický. Nejprve ukážeme, že pokud kořeny označíme v opačném pořadí, bude hodnota výrazu stejná, tedy že $m^2 + n = n^2 + m$. Plyne to z úpravy rovnosti $m^2 - m - 2018 = 0 = n^2 - n - 2018$. Podle Viětových

vztahů platí $m+n=1$, dosazením $m=1-n$ do rovnosti $m^2-m-2018=0$ dostaneme $m^2-(1-n)-2018=0$, odkud $m^2+n=2019$.

Jiné řešení. Úlohu můžeme samozřejmě řešit tak, že si najdeme kořeny dané rovnice, kterými jsou čísla $(1 \pm 3\sqrt{897})/2$ a dosadíme do obou vztahů m^2+n a n^2+m . Jejich úpravu necháváme laskavému čtenáři.

Příklad 16 (1998)

Rovnice $x^2+3x+5=0$ má kořeny α a β . Která rovnice má kořeny $\frac{1}{\alpha}$ a $\frac{1}{\beta}$?

- (A) $x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}=0$ (B) $5x^2+3x+1=0$ (C) $15x^2+x+1=0$
 (D) $x^2+\frac{1}{3}x+1=0$ (E) $x^2+3x+\frac{1}{5}=0$

Řešení. Podle Viětových vztahů platí $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=5$, proto

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}.$$

Podobně podle Viětových vztahů má kořeny $\frac{1}{\alpha}$ a $\frac{1}{\beta}$ rovnice $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=0$. Tu snadno upravíme na tvar (B).

Příklad 17 (2016)

Každá z rovnic $x^2+ax+b=0$ a $x^2+bx+a=0$ s reálnými koeficienty a a b ($a \neq b$) má dva reálné kořeny. Součet druhých mocnin kořenů první z nich je roven součtu druhých mocnin kořenů druhé rovnice. Určete hodnotu $a+b$.

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 4 (E) nelze jednoznačně určit

Řešení. Označíme-li t_1, t_2 kořeny první rovnice a u_1, u_2 kořeny druhé, podle Viětových vztahů platí $t_1+t_2=-a$, $t_1t_2=b$, $u_1+u_2=-b$, $u_1u_2=a$. Podle zadání pak

$$a^2-2b=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=t_1^2+t_2^2=u_1^2+u_2^2=(u_1+u_2)^2-2u_1u_2=b^2-2a.$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$0=a^2-2b-b^2+2a=(a-b)(a+b+2).$$

Jelikož podle zadání $a \neq b$, platí $a+b=-2$. Pro úplnost ještě dodejme, že existují taková čísla a, b , že obě rovnice mají uvedené vlastnosti. Například pro $a=-2$ a $b=0$ má první rovnice kořeny 0 a 2 se součtem druhých mocnin 4 . Druhá rovnice má kořeny $\pm\sqrt{2}$ se stejným součtem druhých mocnin.

Příklad 18 (2003)

Polynom $P(x)$ vyhovuje pro všechna reálná čísla x rovnici

$$P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2.$$

Určete $P(x^2 - 1)$.

- (A) $x^4 - 4x^2$ (B) x^4 (C) $x^4 + 4x^2 - 4$ (D) $x^4 - 4$ (E) jiná odpověď

Řešení. Pro každé reálné číslo x platí

$$x^4 + 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4 = ((x^2 + 1) - 1)^2 - 4.$$

Jelikož všechna reálná čísla t větší nebo rovna 1 můžeme zapsat ve tvaru $t = x^2 + 1$, platí pro ně $P(t) = (t - 1)^2 - 4$. Takovýchto čísel je nekonečně mnoho, každý mnohočlen je určen hodnotami v konečně mnoha bodech (aspoň o jedna více než je jeho stupeň), výše uvedený předpis tak platí pro všechna reálná čísla t . Proto

$$P(x^2 - 1) = ((x^2 - 1) - 1)^2 - 4 = x^4 - 4.$$

Příklad 19 (2016)

Kolik různých řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1?$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) nekonečně mnoho

Řešení. Buď platí $x^2 + x - 30 = 0$ a $x^2 - 4x + 5 \neq 0$, nebo $x^2 - 4x + 5 = 1$, nebo $x^2 - 4x + 5 = -1$ a $x^2 + x - 30$ je celé číslo dělitelné dvěma. První rovnice z první dvojice má kořeny -6 a 5 , oba vyhovují druhé nerovnosti. Druhá rovnice má (dvojnásobný) kořen 2 , první rovnice třetí dvojice nemá reálné kořeny, jelikož její diskriminant je $16 - 24 < 0$.

Příklad 20 (2021)

Nechť $M(k)$ je maximum funkce $y = |4x^2 - 4x + k|$ pro libovolné reálné číslo k , $x \in \langle -1; 1 \rangle$. Najděte nejmenší možnou hodnotu $M(k)$.

- (A) 4 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 5 (D) $\frac{11}{2}$ (E) 8

Řešení. Každá z parabol $y = p(x) = 4x^2 - 4x + k$ má vrchol v bodě $x = 1/2 \in \langle -1; 1 \rangle$. Zřejmě tak platí $p(-1) > p(1) > p(1/2)$. Jelikož grafem funkce $p(x)$ je spojitá parabola, která má minimum v bodě $1/2$, kvadratická

funkce $p(x)$ na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ nabývá všech hodnot mezi čísly $p(1/2)$ a $p(-1)$. Platí tak

$$M(k) = \max\{|p(-1)|, |p(1/2)|\} = \max\{|8 + k|, |-1 + k|\}.$$

Rovnice $|8 + k| = |-1 + k|$ má jediné řešení $k = -7/2$, pro něž jsou obě absolutní hodnoty $9/2$. Pro $k < -7/2$ je $M(k) \geq |-1 + k| = 1 - k > 9/2$, pro $k > -7/2$ platí $M(k) \geq |8 + k| = 8 + k > 9/2$. Funkce $M(k)$ tak nabývá svého minima $9/2$ v bodě $k = -7/2$.

Příklad 21 (2024, mezinárodní verze)

Mnohočlen P vyhovuje vztahu $P(x + 1) = x^2 - x + 2P(6)$ pro všechna reálná čísla x . Jaký je součet koeficientů mnohočlenu P ?

- (A) -40 (B) -6 (C) 12 (D) 40 (E) žádný z předcházejících

Řešení. Dle zadání rovnost platí pro $x = 5$, odtud $P(6) = 5^2 - 5 + 2P(6)$, tedy $P(6) = -20$. Proto $P(x + 1) = x^2 - x - 40$. Součet koeficientů mnohočlenu P je roven $P(1)$, do dané rovnice dosadíme $x = 0$ a dostaneme $P(1) = 1^2 - 1 - 40 = -40$.

Jiné řešení. Jako v předcházejícím řešení dostaneme $P(x+1) = x^2 - x - 40$. Proto mnohočlen

$$P(x) = P((x - 1) + 1) = (x - 1)^2 - (x - 1) - 40 = x^2 - 3x - 38$$

má součet koeficientů $1 + (-3) + (-38) = -40$.

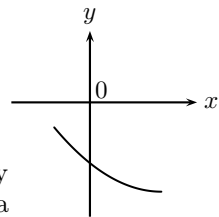
3. Grafy polynomických funkcí

Úlohy testující, zda žáci chápou vztah mezi předpisem mnohočlenu a jeho grafem jsou v Matematickém klokanovi velmi oblíbené a vděčné.

Příklad 22 (2020)

Na obrázku vidíte část paraboly $y = ax^2 + bx + c$. Které z následujících čísel je kladné?

- (A) c (B) $b + c$ (C) ab (D) ac (E) bc



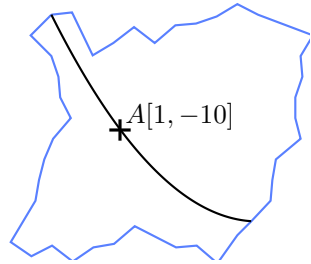
Řešení. Parabola na obrázku je otevřená nahoru, tedy $a > 0$, protíná osu y v záporném čísle, tedy $c < 0$ a její vrchol leží vpravo od osy y , proto je $-b/(2a) > 0$, tedy $b < 0$. Tyto poznatky vylučují (A), (B), (C), (D). Na obrázku je část paraboly

$$y = 0,2(x - 6)(x + 2) + 0,7 = 0,2x^2 - 0,8x - 1,7.$$

Příklad 23 (2011)

Na tabuli byla nakreslena (v kartézské soustavě souřadnic s obvyklou polohou os x a y) parabola $y = ax^2 + bx + c$ a na ní vyznačen bod $A[1; -10]$. Po smazání části tabule (včetně os) zůstala pouze část na obrázku. Které z následujících tvrzení může být nepravdivé?

- (A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $a + b + c < 0$
 (D) $b^2 > 4ac$ (E) $c < 0$



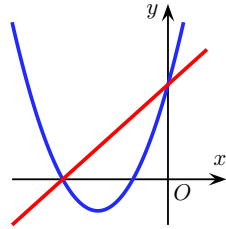
Řešení. Parabola je otevřená nahoru, tedy $a > 0$, její vrchol leží vpravo od přímky $x = 1$, tedy $-b/(2a) > 1$ čili $b < -2a < 0$. Jelikož funkce y v bodě 1 nabývá hodnoty -10 , je součet jejích koeficientů záporný, navíc má dva reálné kořeny, tedy kladný diskriminant $b^2 - 4ac > 0$. Nemusí tak platit jediné (E), např. pro funkci

$$y = 25(x - 3/5)(x - 2) = 25x^2 - 65x + 30.$$

Příklad 24 (2021)

Na obrázku je parabola o rovnici $y = ax^2 + bx + c$, kde a , b a c jsou různá reálná čísla. Přímka protíná parabolu na záporné poloose x a kladné poloose y . Která z následujících rovnic může být rovnicí této přímky?

- (A) bc (B) cb (C) ab (D) ac (E) ca



Řešení. Parabola na obrázku je otevřená nahoru, tedy $a > 0$, v bodě 0 nabývá hodnotu c , tedy $c > 0$. Přímka na obrázku prochází také bodem $(0, c)$, tedy její absolutní člen je c . Vzhledem k tomu, že a , b , c jsou navzájem různá čísla, tím vyloučíme (B), (C), (E). Pokud by hledanou přímkou byla (A), potom by rovnice $ax^2 + bx + c = bx + c$ měla záporný kořen (který je (menším) kořenem kvadratického mnohočlenu) a kořen 0 (obě křivky prochází bodem $(0, c)$). Ovšem tato rovnice má dvojnásobný kořen 0, což je spor. Správnou odpovědí tak může být jediné (D). Například parabola $y = x^2 + 3x + 2$ prochází body $(-2; 0)$, $(-1; 0)$ a $(0; 2)$. Přímka $y = x + 2$ jím prochází také a osu x protíná v bodě -2 .

Příklad 25 (2018)

Graf kvadratické funkce $f(x) = x^2 + px + q$ s reálnými koeficienty protíná osy x a y ve třech různých bodech. Kružnice procházející těmito body

protíná graf funkce f v dalším bodě. Najděte jeho souřadnice pro libovolné přípustné hodnoty p, q .

- (A) $[0, -q]$ (B) $[p, q]$ (C) $[-p, q]$ (D) $\left[-\frac{q}{p}, \frac{q^2}{p^2}\right]$ (E) $[1, p + q + 1]$

Řešení. Parabola, která je grafem kvadratické funkce f , protíná osu y v jediném bodě $C[0, q]$, osu x tak musí protnout ve dvou bodech, které jsou kořeny f . Osou souměrnosti této paraboly je přímka $x = -p/2$ procházející jejím vrcholem rovnoběžná s osou y . Tato přímka také prochází středem uvažované kružnice, je tak její osou. Bodem souměrně sdruženým s bodem C podle této přímky je bod $[-p, q]$.

Například kružnice $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ prochází průsečíky $[-1; 0]$, $[0; -3]$ a $[3; 0]$ paraboly $y = x^2 - 2x - 3$ s osami x a y . Dosazením snadno zjistíme, že tato kružnice neprochází body $[0; 3]$, $[-2; -3]$, $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$, $[1; -4]$, což vylučuje distraktory (A), (B), (D), (E).

Příklad 26 (2007)

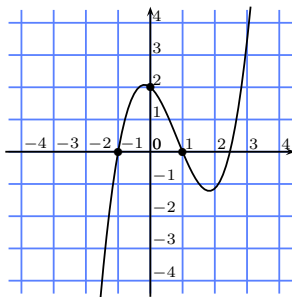
Na obrázku vidíte část grafu funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Určete číslo b .

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

Řešení. Graf funkce prochází body $[-1; 0]$, $[0; 2]$, $[1; 0]$, platí tak

$$-a + b - c + d = 0,$$

$$a + b + c + d = 0.$$



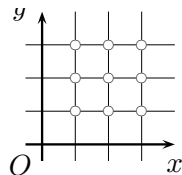
Pokud od součtu první a třetí rovnice odečteme dvojnásobek druhé, dostaneme $b = -2$. Pro úplnost dodejme, že na obrázku je graf funkce

$$y = 0,81x^3 - 2x^2 - 0,81x + 2 = (x - 1)(x + 1)(0,81x - 2).$$

Příklad 27 (2016)

Kolik kvadratických funkcí proměnné x má vlastnost, že jejich graf prochází alespoň třemi z vyznačených mřížových bodů kartézské soustavy souřadnic na obrázku?

- (A) 6 (B) 18 (C) 19 (D) 22 (E) jiný počet



Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou vyznačeny mřížové body $[i, j]$, kde $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Graf nejvýše kvadratické funkce je určen

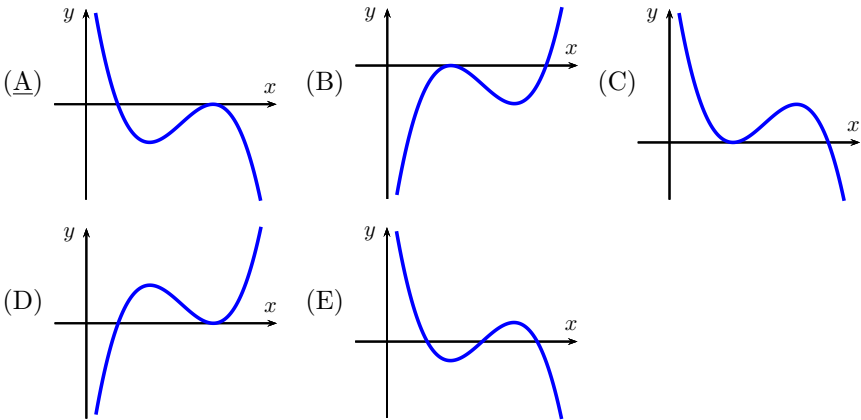
třemi různými body, tato parabola tak prochází právě jedním z bodů každého sloupce (v našem případě $x = 1, 2, 3$). Pro každý sloupec jsou to tři možnosti, existuje tak $3^3 = 27$ vyhovujících nejvýše kvadratických funkcí. Mezi nimi je však právě pět lineárních, jsou to funkce $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = x$, $y = 4 - x$.

Příklad 28 (2013)

Pro reálná čísla $a < b$ uvažujme funkci

$$W(x) = (a - x)(b - x)^2.$$

Na jednom z následujících obrázků je její graf. Na kterém?



Řešení. Mnohočlen W třetího stupně má dva reálné kořeny ((E) má tři), z nichž větší (b) je dvojnásobný (nevyhovuje (B), (C)). Přitom pro $x > b$ platí $W(x) < 0$.

Závěr

Uvedli jsme 28 úloh o mnohočlenech, které se objevily za 30 let v soutěži Matematický klokan. Můžeme konstatovat, že tyto úlohy jednak pokrývají učivo o mnohočlenech ze střední školy a mnohé z nich jej zajímavým způsobem rozvíjejí. Mohou tak sloužit jako rozvíjecí učivo pro nadanější žáky, jednak jako příprava k maturitní zkoušce z matematiky.