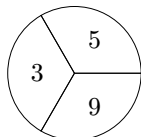


O netranzitivních ruletkách

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, POLSKO

V článku se budeme věnovat *ruletkám* a jejich vybraným vlastnostem. Ruletka je pomůcka určená k losování čísel. Zatím se omezíme jen na ruletky se stejně velkými sektory (vylosování každého z čísel na ruletce je stejně pravděpodobné). Příklad ruletky se 3 sektory je na obr. 1.



Obr. 1

Takovou třísektorovou ruletku lze ztotožnit s množinou $R = \{3, 5, 9\}$.

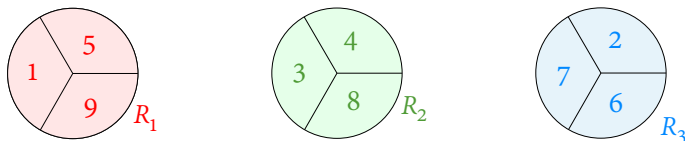
Definice 1

Řekneme, že n -sektorové ruletky R_1, R_2, R_3 tvoří *triplet*, označujeme (R_1, R_2, R_3) , pokud jsou množiny R_1, R_2, R_3 navzájem disjunktní a splňují podmínky $|R_1| = |R_2| = |R_3| = n$ a $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$.

Mějme triplet (R_1, R_2, R_3) a uvažujme losování čísel pomocí ruletek R_{j_1} a R_{j_2} , kde $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$. Symbolem $\{R_{j_1} \gg R_{j_2}\}$ označíme jev, že číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_1} bude větší než číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_2} .

Příklad 1

Na obr. 2 máme triplet (R_1, R_2, R_3) , kde $R_1 = \{1, 5, 9\}$, $R_2 = \{3, 4, 8\}$, $R_3 = \{2, 6, 7\}$.



Obr. 2

Uvažujme nyní hru dvou hráčů, ve které si každý hráč vybere jednu z uvedených ruletek (každý jinou). Hráči losují pomocí své ruletky a ten, kdo vylosuje větší číslo, vyhrává. Soupeř vám nabídne, že si můžete vybírat ruletku jako první. Je to dobrá nabídka?

Mohlo by se zdát, že možnost vybrat si ruletku jako první je určitě výhodou. Vyberu si přece tu nejlepší a soupeři nechám na výběr ze dvou zbývajících. Zbývá jen určit, kterou ruletku si mám vybrat. Porovnáme tedy, jaké šance na výhru dávají hráčům jednotlivé ruletky.

Vylosujme nejprve dvojici čísel, jedno pomocí ruletky R_1 a druhé ruletkou R_2 . Grafická interpretace všech možných výsledků tohoto pokusu je na obr. 3. Červenou barvou je znázorněno 5 výsledků příznivých jevu $\{R_1 \gg R_2\}$, tedy $P(R_1 \gg R_2) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$. Řekneme, že ruleтка R_1 je lepší než ruleтка R_2 .

8			
4			
3			
	1	5	9

Obr. 3

Pomocí podobného obrázku lze dokázat, že ruleтка R_2 je lepší než ruleтка R_3 . Nyní by se mohlo zdát, že nutně musí být ruleтка R_1 lepší než ruleтка R_3 . Ale to není pravda. Čtenář se snadno přesvědčí, že ruleтка R_3 je lepší než ruleтка R_1 . Mezi těmito třemi ruletkami tedy neexistuje nejlepší ruleтка. Vybírat si ruletku jako první tedy není výhodné. Hráč, který si vybírá ruletku jako druhý v pořadí, je ve výhodě, což se může zdát paradoxní.

Definice 2

Triplet (R_1, R_2, R_3) nazveme *netranzitivní*, pokud

$$P(R_1 \gg R_2) > \frac{1}{2}, \quad P(R_2 \gg R_3) > \frac{1}{2}, \quad P(R_3 \gg R_1) > \frac{1}{2}.$$

Příklad 2

Mějme triplet 6sektorových ruletek (R_1, R_2, R_3) , kde

$$R_1 = \{4, 5, 7, 10, 13, 18\}, \quad R_2 = \{2, 3, 9, 12, 14, 17\}, \quad R_3 = \{1, 6, 8, 11, 15, 16\}.$$

posloupnosti atd. Odtud dostaneme

$$\sigma(R_1, R_2, R_3) = (R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Naopak z kódu tripletu můžeme získat jednotlivé ruletky. Například kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_1, R_2, R_3, R_2, R_1, R_2, R_3, R_2, R_1, R_3, R_3, R_1)$$

určuje 5sektorové ruletky

$$R_1 = \{1, 4, 8, 12, 15\}, R_2 = \{3, 5, 7, 9, 11\}, R_3 = \{2, 6, 10, 13, 14\}.$$

S využitím kódu tripletu můžeme snadno zjistit, která ze dvou ruletek je lepší.

Definice 4

Uvažujme kód $\sigma(R_1, R_2, R_3)$. Symbolem

$$\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}), \quad j_1 \neq j_2, \quad j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$$

označme počet všech případů, kdy v kódu $\sigma(R_1, R_2, R_3)$ znaku R_{j_1} předchází znak R_{j_2} . Číslo $\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2})$ nazveme *hodnotou ruletky* R_{j_1} vzhledem k ruletce R_{j_2} .

Příklad 4

V příkladu 3 jsme měli kód

$$\sigma(R_1, R_2, R_3) = (R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Ukážeme si, jak vypočítáme $\delta(R_1 \succ R_2)$, tedy hodnotu ruletky R_1 vzhledem k ruletce R_2 .

1. Před prvním symbolem R_1 neleží v uvedené posloupnosti žádný symbol R_2 , tj. 0.
2. Druhému symbolu R_1 předcházejí dva symboly R_2 , tedy připočteme 2.
3. Před třetím symbolem R_1 leží tři symboly R_2 , tedy připočteme 3.

Odtud dostaneme, že $\delta(R_1 \succ R_2) = 0 + 2 + 3 = 5$. Analogicky máme $\delta(R_2 \succ R_1) = 1 + 1 + 2 = 4$.

Necháme na laskavém čtenáři, aby si rozmyslel, jako souvisejí čísla $\delta(R_1 \succ R_2) = 5$ a $\delta(R_2 \succ R_1) = 4$ s obr. 3. Pak bude zřejmé, že platí následující věta:

Věta 1

Uvažujme kód $\sigma(R_1, R_2, R_3)$ o délce $3m$, kde $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$. Pokud

$$\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}) > \delta(R_{j_2} \succ R_{j_1}),$$

pak je ruletka R_{j_1} lepší než ruletka R_{j_2} .

Věta 1 dává jednoduchý návod, jak pomocí kódu porovnat, která ze dvou ruletek je lepší.

Pro další úvahy budeme potřebovat trojice *spravedlivých* ruletek. Nej-jednodušší takovou trojici ilustruje následující příklad 5.

Příklad 5

Triplet $R_1 = \{1, 6\}, R_2 = \{2, 5\}, R_3 = \{3, 4\}$ má kód

$$(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_3 \gg R_1) = \frac{1}{2}.$$

Posloupnost $(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1)$ generovanou tripletem *spravedlivých* ruletek nyní použijeme k dalším úvahám. Z příkladu 3 víme, že triplet (R_1, R_2, R_3) netranzitivních ruletek $R_1 = \{1, 5, 9\}, R_2 = \{3, 4, 8\}, R_3 = \{2, 6, 7\}$ má kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1). \tag{1}$$

Prodlužme tento kód tak, že na jeho začátek přidáme kód tripletu *spravedlivých* ruletek z příkladu 5. Tak vznikne nový kód

$$(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1, R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1). \tag{2}$$

Je zřejmé, že každé číslo $\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}), j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ pro kód (2) bude o $3 \cdot 2$, tj. o 6 větší než analogické číslo pro kód (1). To nás vede k závěru, že vztahy \gg mezi ruletkami zůstanou zachovány a netranzitivita se přenáší i na nově vzniklé ruletky.

Dekódováním kódu (2) získáme triplet ruletek (R_1, R_2, R_3) , kde

$$R_1 = \{1, 6, 7, 11, 15\}, R_2 = \{2, 5, 9, 10, 14\}, R_3 = \{3, 4, 8, 12, 13\}.$$

Čtenář si sám ověří, že získaný triplet ruletek je skutečně netranzitivní. Ukázali jsme si tedy postup, jak lze z tripletu 3sektorových netranzitivních ruletek získat triplet netranzitivních 5sektorových ruletek. Prodloužení kódu lze také provést připojením kódu $(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1)$ na konec kódu (1). V takovém případě získáme kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1, R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1),$$

který generuje triplet ruletek

$$R_1 = \{1, 5, 9, 10, 15\}, \quad R_2 = \{3, 4, 8, 11, 14\}, \quad R_3 = \{2, 6, 7, 12, 13\}.$$

Popisovaný postup lze použít libovolně mnohokrát. Čtenáři necháváme za úkol zjistit, prodloužením jaké posloupnosti ruletek vznikla posloupnost ruletek z příkladu 5.

Literatura

- [1] *Gardner, M.*: Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles Paradoxes And Problems. WW Norton & Company, 2001.
- [2] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokół nas. Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 3. vydání, 2017.
- [3] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.
- [4] *Savage, R. P.*: The paradox of nontransitive dice. The American Mathematical Monthly, roč. 101, (1994), č. 5, s. 429–436.
- [5] *Schaefer, A., Schweig, J.*: Balanced nontransitive dice. The College Mathematics Journal, roč. 48 (2017), č. 1, s. 10–16.
- [6] *Rump, C. M.*: Strategies for rolling the Efron dice. Mathematics Magazine, roč. 74, (2001), č. 3, s. 212–216.