MATEMATIKA

Shodná rozložitelnost

FRANTIŠEK KUŘINA – DAG HRUBÝ

Hradec Králové – Jevíčko

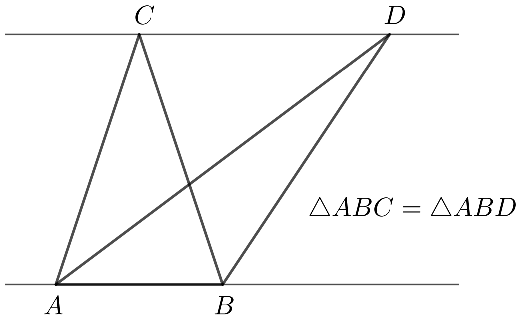
Vše již tu bylo, vše se opakuje,
i čestný básník druhé olupuje.
Marie von Ebner-Eschenbach

V tomto příspěvku se budeme zabývat především velikostmi geometrických útvarů, tedy tematikou, která je součástí vyučování matematice od prvního stupně základní školy až po maturitu. Dovolili jsme si tedy uvést náš článek poněkud provokativním motem. Avšak nejen proto. Petr Vopěnka o tom píše v úvodu k Eukleidovým Základům:

Praktická geometrie (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Takzvaní *napínači provazů* vyměřovali a vytyčovali nejrůznější pozemky a stavby. Zachycovali je značkami (body), které umísťovali do vrcholů (rohů), popřípadě některých dalších významných míst vytyčovaných útvarů. Měřili čtyři druhy jevu velikosti: *délky, plošné obsahy, objemy* a *velikosti úhlů.* Veličinami délky rozuměli délky různých jednotlivých provazů, či vzdálenosti dvou různých značek. Podobně veličinami plošného obsahu (popřípadě objemu) rozuměli plošné obsahy různých jednotlivých plošných útvarů (popřípadě objemy různých jednotlivých těles).

Eukleides však tuto historickou skutečnost nerespektuje. V Základech ztotožňuje velikosti geometrických útvarů s těmito útvary samotnými. Doložíme to několika citacemi:

- čára je délka bez šířky,
- trojúhelníky na stejných základnách a mezi rovnoběžkami jsou si rovny (obr. 1),
- v pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírající (věta Pythagorova).



Obr. 1

V naší škole důsledně rozlišujeme geometrický útvar (množina bodů) a jeho velikost (kladné reálné číslo). Odříká-li žák Pythagorovu větu ve znění: „Čtverec nad přeponou se rovná dvěma čtvercům nad odvěsnami“, napomene ho učitel: „Copak čtverec se může rovnat dvěma čtvercům?“ Přitom se však zavedení velikostí úseček a obsahu věnuje v našich středoškolských učebnicích velmi malá, či dokonce nulová pozornost. Tak např. v učebnici planimetrie pro gymnázia [2] je uvedeno pouze: „Délka (velikost) se určuje měřením, které se provádí pomocí jednotkové úsečky.“ A po 26 letech je táž autorka ještě stručnější: „Délka úsečky je vzdálenost krajních bodů“ [3]. My zde budeme vycházet z těchto definic:

Délka úsečky je kladné číslo, pro které platí:

- shodné úsečky mají sobě rovné délky,
- délka grafického součtu úseček je rovna součtu velikostí jejich částí,
- existuje jednotková úsečka.

Obsahem mnohoúhelníku rozumíme kladné číslo, pro které platí::

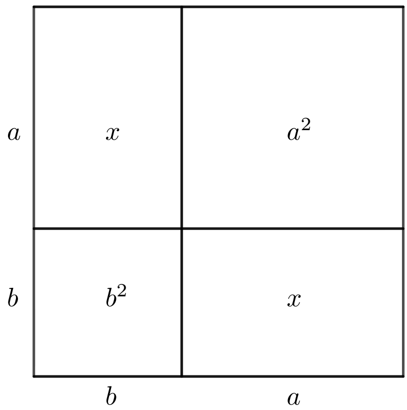
- shodné mnohoúhelníky mají sobě rovné obsahy,
- obsah sjednocení dvou nepřekrývajících se mnohoúhelníků je roven součtu obsahů těchto částí,
- čtverec o délce strany a délkových jednotek má obsah a^2 čtverečných jednotek.

Na základě těchto definic můžeme odvodit vzorec pro obsah obdélníku, aniž bychom museli uvažovat, zda jsou velikosti jeho stran čísla přirozená, racionální či iracionální.

Můžeme uvažovat takto. Pro čtverec na obr. 2 platí

$$(a + b)^2 = a^2 + 2x + b^2,$$

a tedy $x = ab$. Problematice měření délek se zde nebudeme věnovat. Odkazujeme na publikaci [4].

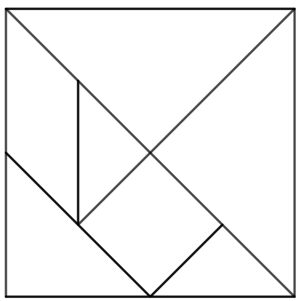


Obr. 2

V další části článku uvedeme jako úvod do problematiky několik známých úloh o velikostech útvarů. V poslední části pak budeme definovat pojem shodné rozložitelnosti a uvedeme několik vlastností této relace.

Úlohy o velikostech geometrických útvarů

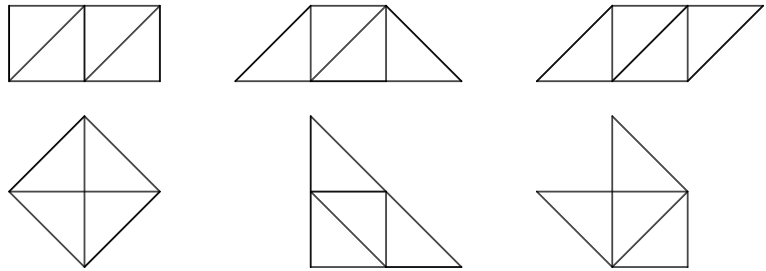
První úloha je motivována hrou *Tangram*, ve které se z dílů čtverce skládají různé geometrické útvary, viz obr. 3. O didaktickém využití tangramu napsala pěkný článek Hana Lišková. Je publikován ve sborníku [5, s. 139–142].



Obr. 3

Úloha 1

Skládejte ze čtyř shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s odvěsnami délky 1 cm různé mnohoúhelníky.



Obr. 4

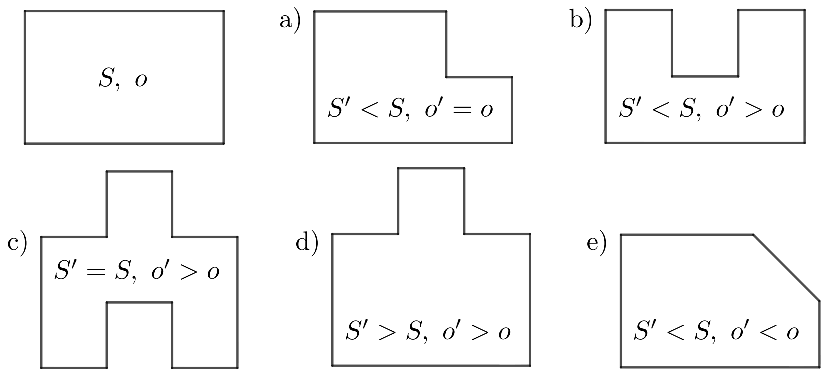
Některé výsledky jsou zakresleny na obr. 4 (obdélník, lichoběžník, rovnoběžník, čtverec, trojúhelník, nekonvexní šestiúhelník). Všechny tyto mnohoúhelníky mají obsah 2 cm^2. V další úloze si všimneme souvislosti obvodu a obsahu mnohoúhelníků.

Úloha 2

Obdélník má obsah S a obvod o. Nakreslete mnohoúhelník, pro který platí:

a) $o' = o$ a $S' < S$ b) $o' > o$ a $S' < S$ c) $o' > o$ a $S' = S$
d) $o' > o$ a $S' > S$ e) $o' < o$ a $S' < S$

Výsledky jsou na obr. 5.

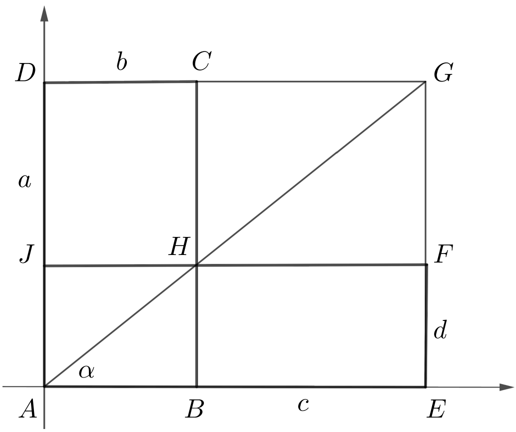


Obr. 5

Úloha 3

K obdélníku $ABCD$ se stranami $|AD| = a$, $|AB| = b$ sestrojte obdélník téhož obsahu, který má jednu stranu c.

Předpokládejme, že hledaný obdélník má strany c, d a je umístěn v souřadnicovém systému podle obr. 6.



Obr. 6

Z rovnosti $ab = cd$ plyne

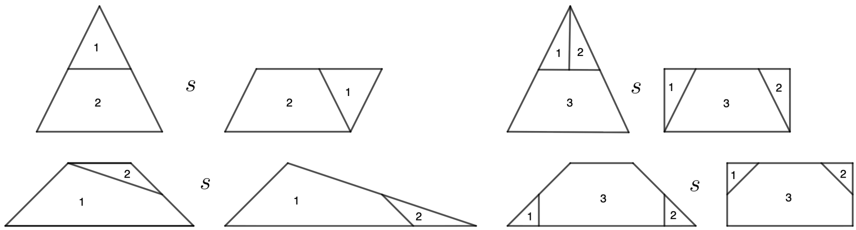
$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Body A, H, G leží tedy v přímce a konstrukce je podle obrázku zřejmá. Obdélník $ABCD$ má stejný obsah jako obdélník $AEFJ$, neboť od shodných trojúhelníků AEG a ADG odebereme obsahy shodných trojúhelníků HCG a HFG.

Shodná rozložitelnost

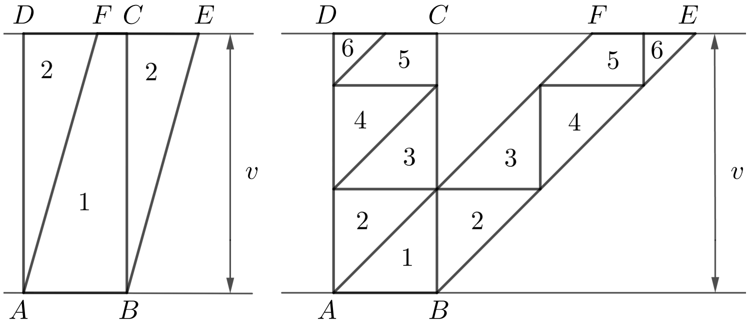
Mnohoúhelníky U, V jsou shodně rozložitelné, lze-li např. mnohoúhelník U rozdělit na části, z nichž lze složit mnohoúhelník V. Je zřejmé, že shodně rozložitelné mnohoúhelníky mají týž obsah. Otázka, zda platí obráceně, že mnohoúhelníky téhož obsahu jsou shodně rozložitelné není triviální a byla kladně vyřešena německým matematikem *Maxem Dehnem* (1878–1952). Naše další úvahy budou vedeny snahou tuto skutečnost dokázat.

Shodnou rozložitelnost útvarů U, V budeme symbolicky zapisovat $U\,s\,V$. Na obr. 7 jsou zakresleny 4 dvojice shodně rozložitelných mnohoúhelníků obsahu 2 cm^2.



Obr. 7

Na obr. 8 vidíme shodnou rozložitelnost rovnoběžníků o společné základně a stejné výšce.

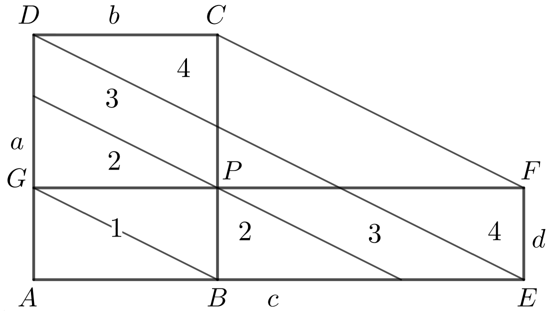


Obr. 8

Ukažme shodnou rozložitelnost libovolných dvou obdélníků $ABCD$, $AEFG$ téhož obsahu. Umístěme obdélníky podle obr. 9. Označíme-li strany obdélníků $|AD| = a$, $|AB| = b$, resp. $|AE| = c$, $|AG| = d$, pak platí

$$ab = cd \qquad \text{a} \qquad \frac{d}{b} = \frac{a-d}{c-b}.$$

Přímky BG, ED a FC jsou tedy rovnoběžné. Bodem P na obr. 9 veďme další přímku s nimi rovnoběžnou. Obdélník $AEFG$ se skládá z obdélníku 1 a shodných trojúhelníků 2 a 4. Rovnoběžníky 3 jsou podle předchozího výsledku shodně rozložitelné. Tím je shodná rozložitelnost obdélníků prokázána.



Obr. 9

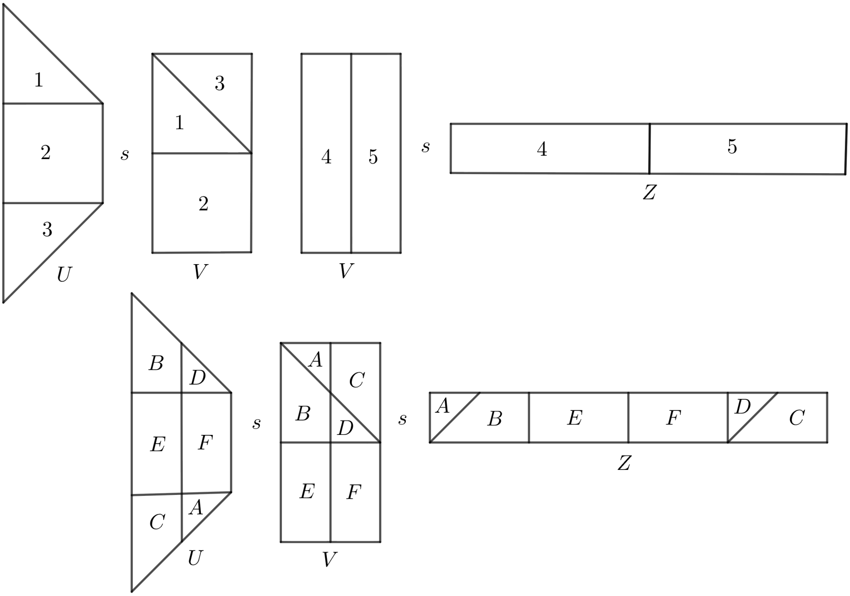
Připomeňme nyní dva poznatky. Relace r definovaná na množině M se nazývá relací ekvivalence, je-li reflexivní ($\forall U \in M\colon U\ r\ U$), symetrická ($\forall U, V \in M\colon U\ r\ V \Rightarrow V\ r\ U$) a tranzitivní ($\forall U, V, Z \in M\colon U\ r\ V$ a $V\ r\ Z \Rightarrow U\ r\ Z$). Každá relace ekvivalence r na množině M rozkládá tuto množinu na třídy $M/\,r$ navzájem ekvivalentních disjunktních množin. Dokažme, že relace shodné rozložitelnosti je relace ekvivalence. Reflexivnost a symetričnost relace s je zřejmá, neboť $U\,s\,U$ a $U\,s\,V \Rightarrow V\,s\,U$. Ideu důkazu tranzitivity uveďme příkladem.

Lichoběžník U na obr. 10 je shodně rozložitelný s obdélníkem V, neboť každý z těchto útvarů je složen ze shodných trojúhelníků 1, 3 a čtverce 2. Z druhé strany obdélník V je shodně rozložitelný s obdélníkem Z. Platí tedy $U\,s\,V$ a $V\,s\,Z$. Rozložme obdélník V na části jak z prvého, tak druhého rozkladu. Z částí A, B, C, D, E, F, které takto dostaneme, lze složit jak lichoběžník U, tak obdélník Z. Platí tedy $(U\,s\,V)$ a $(V\,s\,Z) \Rightarrow U\,s\,Z$.

Předpokládejme, že pro útvary U, V, Z platí $U\,s\,V$ a $V\,s\,Z$. Sestrojme v útvaru V jak rozdělení z $U\ s\ V$, tak i rozdělení z $V\ s\ Z$. Tento rozklad můžeme přenést jak na mnohoúhelník U, tak na mnohoúhelník Z. Platí tedy $U\ s\ Z$. Relace s shodné rozložitelnosti je relací ekvivalence a třídy $M/\,s$ této relace na množině mnohoúhelníků M tvoří mnohoúhelníky téhož obsahu. Mají-li dva mnohoúhelníky stejný obsah, patří do téže třídy a jsou tedy shodně rozložitelné. Platí tedy základní věta o shodné rozložitelnosti:

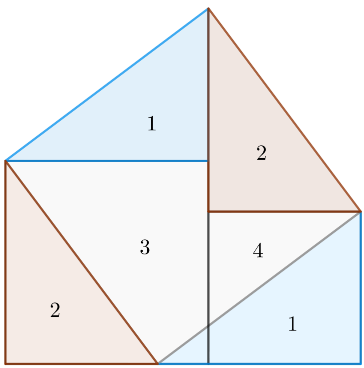
Libovolné dva mnohoúhelníky téhož obsahu jsou shodně rozložitelné.

Tuto větu můžeme dokázat i konstruktivně. Každý z mnohoúhelníků postupně rozložíme na obdélníky, ty pak na obdélníky shodné a společné jejich dělení můžeme převést na původní mnohoúhelníky. Tím bude uskutečněno jejich shodné rozdělení.



Obr. 10

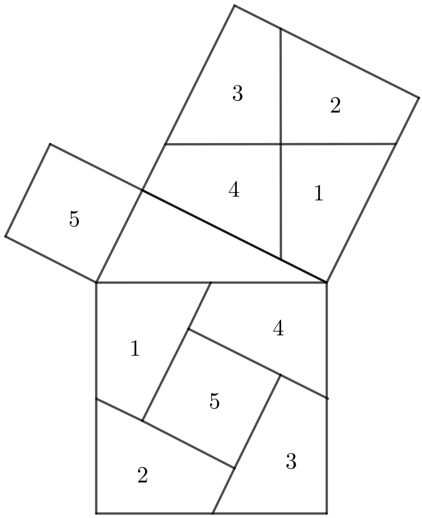
Úlohy o rozdělování mnohoúhelníků se vyskytují snad v celých dějinách elementární geometrie. Ilustrujme to třemi příklady. Nejprve dokážeme dvěma způsoby Pythagorovu větu. Na obr. 11 je čtverec nad přeponou rozdělen na trojúhelníky 1, 2, 4 a čtyřúhelník 3.



Obr. 11

Ze stejných útvarů se skládá sjednocení čtverců nad odvěsnami, tudíž je součet obsahů čtverců nad odvěsnami roven obsahu čtverce nad přeponou.

Druhý důkaz se opírá o obr. 12, jehož autorem je *H. Perigal* (1830). Obrázek vznikl takto: středem čtverce nad větší odvěsnou sestrojíme dvě navzájem kolmé přímky, z nichž jedna je rovnoběžná s přeponou pravoúhlého trojúhelníku. Tyto přímky rozdělí čtverec na čtyři shodné čtyřúhelníky 1, 2, 3, 4, z nichž spolu se čtvercem nad kratší odvěsnou můžeme sestrojit čtverec nad přeponou. Tím je Pythagorova věta dokázána.



Obr. 12

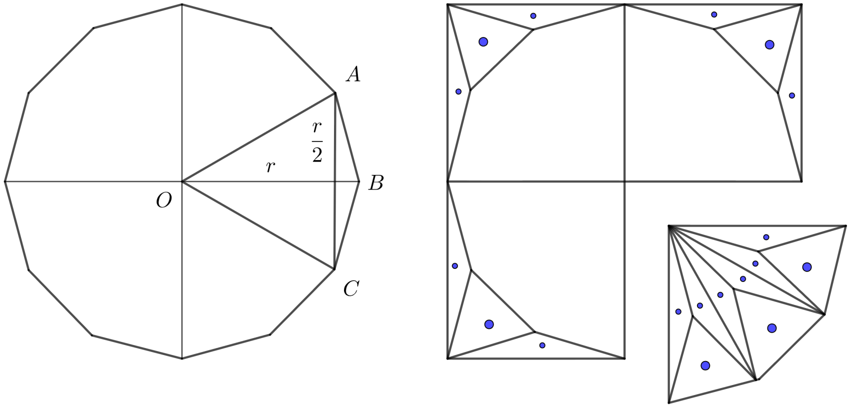
Z Číny desátého století pochází rozdělení pravidelného dvanáctiúhelníku na tři čtverce podle obr. 13. Pravidelný dvanáctiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru r má tedy obsah $3r^2$. To je ovšem zřejmé i z obr. 13. Kdybychom připustili, že obsah pravidelného dvanáctiúhelníku je přibližnou hodnotou obsahu kruhu, tedy $\pi r^2 = 3r^2$, znamenalo by to hrubou aproximaci čísla π číslem 3.

To lze i historicky doložit např. citací z Bible kralické, Starý zákon, I. Kniha královská, Kapitola 7, verš 23:

Udělal také moře slité,[1] *deset loket od jednoho kraje k druhém okrouhle vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třiceti loket vůkol.*

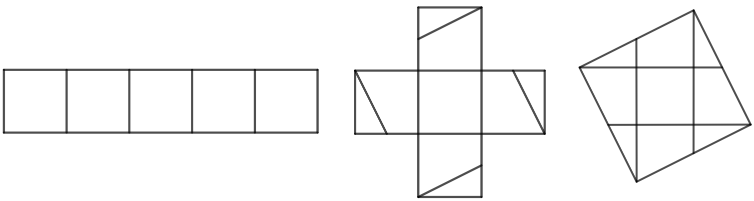
[1] Nádoba s podstavou ve tvaru kruhu s průměrem 10 a obvodem 30.

Podle bible je tedy číslo π rovno číslu 3.



Obr. 13

Nakonec uveďme příklad přeměny pěti čtverců ve čtverec jediný.



Obr. 14

L i t e r a t u r a

[1] *Eukleides*: Základy. Knihy I–IV. OPS, Nymburk, 2008.

[2] *Pomykalová, E.:* Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.

[3] *Pomykalová, E.:* Matematika s nadhledem od prváku k maturitě 6 – Planimetrie I. Fraus, Plzeň, 2019.

[4] *Kuřina F., Půlpán, Z.*: Podivuhodný svět elementární matematiky. Academia, Praha, 2006.

[5] *Lišková, H.*: Tangramové úlohy. In: Fuchs, E. (Ed.): Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let. Sborník příspěvků celostátní konference 19.–21. 10. 2017, Litomyšl, JČMF, Praha, 2018.