FYZIKA

Metodická rôznorodosť a systematizácia výkladu tém o energii v školskej fyzike

PATRIK KRIEK

Gymnázium Jozefa Gregora Tajovského, Banská Bystrica, SLOVENSKO

Pojem energia má v školskej fyzike a celkovo prírodovednom vzdelávaní svoje nezastupiteľné miesto, o čom svedčí aj zaradenie tohto pojmu do jednej z desiatich hlavných nosných myšlienok (tzv. *Big ideas*) prírodovedného vzdelávania v pripravovanej kurikulárnej reforme základného školstva v Slovenskej republike. Je preto namieste sa podrobnejšie zaoberať pojmom energia a špecifickejšie jej formami – kinetickou a potenciálnou energiou. Aj keď ide o tradičnú tému vyskytujúcu sa spravidla v každej učebnici fyziky pre základnú či strednú školu, pri jej výklade sa objavuje veľa rôznorodých metodických postupov, najmä pri odvodzovaní vzťahov pre potenciálnu energiu tiažovú a gravitačnú. Táto rôznorodosť spočíva najmä v samotnej definícii potenciálnej energie a jej zmeny, a tým aj v opise myšlienkového experimentu (teleso v tiažovom/gravitačnom poli buď dvíhame alebo necháme padať). Aj keď pojem potenciálna energia gravitačná sa v kurikulárnych dokumentoch ISCED 3 [1] explicitne nevyskytuje, býva v rámci maturitných seminárov problém s odvodením vzťahu pre túto energiu, ktoré vyžaduje znalosť integrálneho a diferenciálneho počtu. Poznanie tohto vzťahu však umožňuje odvodiť napr. vzťah pre veľkosť parabolickej (únikovej) rýchlosti telesa. Ďalší problém potom vystáva vo voľbe nulovej hladiny potenciálnej energie gravitačnej, ktorá sa v učebniciach v tomto prípade volí väčšinou v nekonečne, s čím súvisia jej záporné hodnoty. Znamienko mínus v tomto vzťahu, ako sa ukazuje, je často ťažko uchopiteľné aj pre študentov fyziky na vysokej škole. V neposlednom rade je otázne, či je v učebniciach výklad potenciálnej energie v gravitačnom a tiažovom poli dostatočne previazaný s výkladom potenciálnej energie v ďalšom type konzervatívneho silového poľa – elektrostatickom poli homogénnom a radiálnom.

Ako už bolo spomenuté, vzhľadom k dôležitosti tohto pojmu v školskej fyzike, vznikol tento článok, ktorého cieľom je:

- podať prehľad o metodických postupoch používaných v učebniciach pri odvodení vzťahov pre potenciálnu energiu, previazanosti tém potenciálna energia v tiažovom, gravitačnom a elektrostatickom poli a diskutovať ich adekvátnosť;
- navrhnúť postupnosť a spôsob výkladu tejto témy tak, aby rešpektoval vyššie uvedené požiadavky.

Článok môže poslúžiť predovšetkým učiteľom fyziky, ktorí v rámci maturitných seminárov venujú pozornosť aj potenciálnej energii gravitačnej, môže však poslúžiť všetkým učiteľom a študentom učiteľstva fyziky, ktorí chcú preniknúť hlbšie do tematiky potenciálnej energie, či už v základnej alebo strednej škole.

Metodológia

Metódou zberu dát bola analýza slovenských a českých učebníc fyziky pre základné a stredné školy, prehľadov fyziky pre stredné a vysoké školy a iných (aj elektronických) zdrojov. Tieto materiály však neboli vybrané náhodne, ale so zreteľom na to, že ich pravdepodobne využívajú žiaci a ich učitelia pri príprave na vyučovaciu hodinu. Keďže s pojmom potenciálna energia sa slovenskí aj českí žiaci stretnú v 8. ročníku, vybrali sme aktuálnu učebnicu pre 8. ročník [2] a učebnicu zo staršej série [3] spolu s jej českou novo-prepracovanou verziou [4]. Ďalej boli vybraté z českých učebníc napr. často využívaná učebnica Fyzika 8 [5]. Do analýzy bola zahrnutá aj niekdajšia učebnica fyziky pre 9. ročník základnej školy [6], v ktorej je taktiež spracovaná tematika energie. Z učebníc pre stredné školy ide hlavne o súčasnú slovenskú učebnicu pre 1. ročník gymnázia [7], stále na Slovensku používanú staršiu učebnicu taktiež pre 1. ročník strednej školy [8], schválenú učebnicu dynamiky [9], českú gymnaziálnu učebnicu mechaniky [10] a českú učebnicu mechaniky pre stredné školy [11]. Pozreli sme sa aj na Přehled středoškolské fyziky [12] a príručku Zmaturuj z fyziky [13], ktoré sú vhodné najmä pri rýchlom opakovaní. Z vysokoškolskej literatúry sme vybrali populárnu učebnicu od autorov Halliday, Resnick a Walker [14], ktorú radi používajú učitelia aj študenti na stredných školách, staršiu učebnicu pre pedagogické fakulty [15] a, podľa nášho názoru, zaujímavo napísanú učebnicu mechaniky [16]. Ďalej sú to vysokoškolské skriptá mechaniky [17, 18] a učebnica didaktiky fyziky [19]. Na analýzu partií ohľadom elektrického poľa boli použité ďalšie materiály uvedené v zozname použitej literatúry. Máme za to, že predchádzajúci výpis zdrojov tvorí široký okruh používaných materiálov pre základné a stredné školy a ide tak o reprezentatívnu vzorku.

Text je členený tak, že na začiatku uvádzame vymedzenie pojmov a všeobecný prehľad k téme energia. Nasleduje samotná analýza, ktorá sa zameriavala hlavne na metodický postup odvodenia vzťahov pre potenciálnu energiu (tiažovú, gravitačnú, pružnosti) a ich diskusii. Postup pri tvorbe nami navrhovaného výkladu je uvedený v predposlednej časti tohto článku.

Vymedzenie pojmov

Podľa [19] je energia integrujúcou veličinou s vysokou informačnou hodnotou v tom zmysle, že v sebe zahŕňa kinematické a dynamické veličiny, ktorými prešla sústava materiálnych objektov pred daným časovým okamihom. Jej hodnota ako fyzikálnej veličiny je vždy určená relatívne, je nutné definovať stav s nulovou energiou. Uvažujme hmotný bod v nejakom silovom poli iných materiálnych objektov. Na hmotný bod pôsobí vonkajšia sila $\vec{F}_\mathrm{v}$, pričom na počiatku je v stave charakterizovanom energiou E_1, v koncovom stave po zmene jeho polohy a rýchlosti je v stave s energiou E_2. Fyzikálne jednoznačne je určená zmena energie hmotného bodu ako

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1}$$

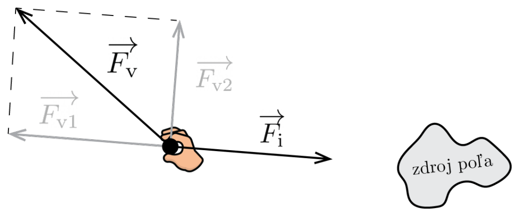
Tento výraz možno považovať za definíciu energie, resp. jej zmeny [19]. Energiu hmotného bodu je výhodné rozdeliť na dve zložky rôznej podstaty: zložku súvisiacu s prácou časti vonkajšej sily $\vec{F}_\mathrm{v1}$, ktorá prekonáva vnútornú silu (silu poľa) $\vec{F}_\mathrm{i} = -\vec{F}_\mathrm{v1}$, a zložku súvisiacu s prácou časti vonkajšej sily $\vec{F}_\mathrm{v2}$, ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti hmotného bodu, teda je príčinou jeho zrýchlenia (obr. 1).

Prvá časť energie je spojená so zmenou polohy častice – nazývame ju potenciálna energia a druhá časť je spojená so zmenou rýchlosti častice – nazývame ju kinetická energia.

Potom môžeme písať

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{p}} + \Delta E_{\mathrm{k}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\mathrm{v1}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\mathrm{v2}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(-\vec{F}_{\mathrm{i}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\mathrm{v2}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \quad (2)$$



Obr. 1 Vonkajšia sila, jej zložky a sila poľa (vnútorná sila), smer zložky $\vec{F}_{\mathrm{v2}}$ môže byť ľubovoľný, závisí na smere a veľkosti $\vec{F}_{\mathrm{v}}$

Zdroj [16] zdôrazňuje, že energia je taká stavová veličina, ktorá má nasledovné vlastnosti:

- V prípade izolovanej sústavy (sústavy, v ktorej nepôsobia žiadne vonkajšie sily) sa celková energia sústavy nemení, je konštantná $E =$ konšt.
- V prípade neizolovanej sústavy je zmena energie sústavy rovná práci vonkajších síl konanej na sústave, teda $\Delta E = W$.

Kinetická energia hmotného bodu a jej zmena

V materiáloch pre základnú školu je výklad kinetickej energie viac-menej jednotný, používa sa však termín pohybová energia a je rozoberaný len kvalitatívne. Je zdôraznené, že pohybová energia prislúcha telesám, ktoré sa pohybujú, pričom relativita pohybu a fakt, že pohybovú energiu možno prisúdiť len telesu, ktoré sa pohybuje vzhľadom na istú vzťažnú sústavu, je zdôraznený len v niektorých učebniciach [4]. Učebnice a materiály pre vyššie stupne škôl už operujú s termínom kinetická energia a venujú sa mu aj po kvantitatívnej stránke. Prakticky vo všetkých sa vyskytuje odvodenie vzťahu pre kinetickú energiu s pomocou výpočtu práce stálej sily urýchľujúcej hmotný bod z nulovej počiatočnej rýchlosti na rýchlosť veľkosti v

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m\left(at\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

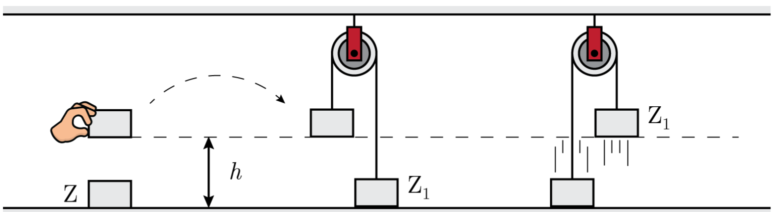
Takýto metodický postup uvádza napr. [9], pričom ďalej autori ozrejmujú, že vzhľadom na počiatočný pokoj telesa je vykonaná práca rovná priamo kinetickej energii $W = E_\mathrm{k}$. Všeobecnejšie tvrdenie a výpočet pre rozdiel kinetických energií uvádzajú napr. učebnice [10, 11], kde počítajú prácu konštantnej sily pri zrýchľovaní telesa z rýchlosti v_1 na rýchlosť v_2

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}a\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}m\left(at_2\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(at_1\right)^2 = \\ = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_\mathrm{k}.$$

Tento krok, nevyskytujúci sa vo všetkých učebniciach, považujeme za potrebný, aby sa nestratila informácia, že práca vykonaná vonkajšou silou rozhoduje o zmene kinetickej energie telesa $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Pritom pod pojmom vonkajšia sila rozumieme vo všeobecnosti časť vonkajšej sily v zmysle rovnice (2), ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti hmotného bodu.

Potenciálna energia tiažová

Výklad potenciálnej energie tiažovej v učebniciach a materiáloch pre základné školy je opäť viac-menej jednotný, používa sa však čisto termín polohová energia, často s dodatkom „v gravitačnom poli Zeme“. V základnej škole preto hovoríme o potenciálnej energii gravitačnej a gravitačnej sile, pri prechode na vyšší stupeň žiaci používajú správnejší termín tiažová sila a s tým spojená potenciálna energia tiažová. Väčšina učebníc napr. [2] alebo [5] uvádzajú odvodenie vzťahu pre potenciálnu energiu ako výpočet práce vonkajšej sily pri zdvíhaní telesa s hmotnosťou m rovnomerným pohybom do výšky h, dostaneme sa tak ku vzťahu $W = F_\mathrm{G}h = mgh = E_\mathrm{p}$. Podrobnejší prístup je uvedený v učebniciach [3] alebo [6]. Na rovnomerné zdvihnutie závažia do výšky h je potrebná práca $W = mgh$, následne je závažie Z zavesené na jeden koniec nite vedenej cez kladku (obr. 2). Na druhom konci nite je zavesené závažie Z_1 s rovnakou hmotnosťou.



Obr. 2 Dvíhanie závažia v gravitačnom poli Zeme, myšlienkový experiment s kladkou

Po nepatrnom náraze do závažia Z začne toto závažie klesať a zdvihne závažie Z_1 do výšky h, čím chceli autori zdôrazniť, že závažie zdvihnuté v gravitačnom poli do výšky h nad podložku môže následne konať mechanickú prácu s veľkosťou mgh – čo je aj práca, ktorá bola potrebná na pôvodné zdvihnutie telesa do tejto výšky.

Zdroj [4] uvádza v poznámke pod čiarou aj skutočnosť, že práca vykonaná vonkajšou silou pri zdvíhaní telesá do istej výšky je rovnaká pri rovnomernom aj *nerovnomernom* pohybe a nezávisí od trajektórie, je však nutné poznamenať, že len v tom prípade, ak sú počiatočná a koncová rýchlosť rovnako veľké – nedochádza ku konaniu ďalšej práce potrebnej na urýchlenie či spomalenie telesa. V základnej škole sa tak stretávame s odvodením vzťahu pre polohovú energiu v gravitačnom poli pomocou práce vonkajšej sily, konkrétnejšie zložky vonkajšej sily $F_{\mathrm{v}1}$ v zmysle rovnice (2), ktorá prekonáva vnútornú silu (v tomto prípade silu gravitačnú) pri rovnomernom dvíhaní telesa. V učebniciach pre vyššie stupne škôl sa stretávame okrem vyššie uvedeného metodického postupu aj s prípadom, kedy hmotný bod/teleso (teraz už v tiažovom poli) necháme padať z istej počiatočnej výšky. Takto postupuje napr. učebnica [10]. Hmotný bod s hmotnosťou m padá voľným pádom v tiažovom poli Zeme z výšky h_1 do výšky h_2, pričom tiažová sila vykoná prácu

$$W_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{G}}s = mg\,(h_1 - h_2) = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2}.$$

Takto autori zadefinujú výraz $E_{\mathrm{p}} = mgh$ ako tiažovú energiu hmotného bodu. Ďalej rozšíria definíciu aj na tiažovú energiu telesa, kedy teleso nahradíme hmotným bodom v jeho ťažisku. Zdroj [8] uvádza, že práca vykonaná tiažovou silou sa rovná úbytku tiažovej energie telesa $W_{\mathrm{G}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$. V učebnici [11] sú podrobne rozobraté obidva prípady. Najprv je teleso dvíhané rovnomerne za pomoci sily do výšky h nad podložku. Je pritom zdôraznená skutočnosť, že v prípade rovnomerného dvíhania je $v = $ konšt. a zmena kinetickej energie je pri tomto dvíhaní nulová. Mechanická práca vykonaná vonkajšou silou sa prejaví prírastkom tiažovej potenciálnej energie hmotného bodu. Práca tiažovej sily pri tomto dvíhaní je záporná $W_{\mathrm{G}} = -mgh$. Následne je rozobratý aj prípad, kedy teleso padá z výšky h voľným pádom ($\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{konšt}}$). Opäť dospejú k záveru, že pri padaní telesa koná teraz kladnú prácu tiažová sila, vedie avšak k zníženiu potenciálnej energie tiažovej telesa. Vidíme, že v učebniciach pre vyšší stupeň sa k odvodeniu vzťahu pre potenciálnu energiu tiažovú využíva aj myšlienkový experiment padania telesa v tiažovom poli a počítanie práce tiažovej sily, čo je v súlade s rovnicou (2), kde platí $\vec{F_\mathrm{i}} = -\vec{F}_{\mathrm{v}1}$. Ide o dva možné korektné postupy, ktorý je však vhodnejší sa pokúsime načrtnúť rozborom ďalších foriem potenciálnej energie v školskej fyzike.

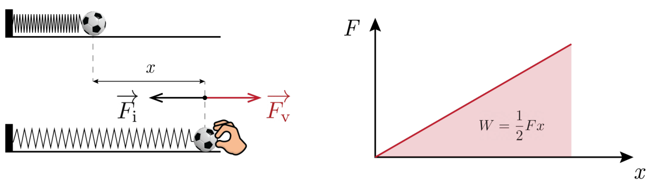
Potenciálna energia pružnosti

Tematika potenciálnej energie pružnosti býva v učebniciach pre základné školy spracovaná okrajovo, používa sa pre ňu termín polohová energia pružnosti/polohová energia pružiny. Napr. [4] uvádza, že polohovú energiu pružnosti má stlačená alebo natiahnutá pružina. Uvádza, že k natiahnutiu resp. stlačeniu pružiny musíme (musí vonkajšia sila) vykonať istú prácu, rovnako veľkú prácu môže konať aj pružina po uvoľnení. Vzťah pre silu pružnosti a potenciálnu energiu pružnosti v základnej škole nebýva odvodzovaný, žiaci nedisponujú vzťahom pre veľkosť sily pružnosti $F = kx$, aj keď vedia, že pružina sa predĺži tým viac, čím väčšia sila na ňu pôsobí.

V materiáloch pre vyššie stupne škôl je tematika energie pružnosti spracovaná viac-menej jednotne, pričom sa používajú termíny potenciálna energia pružnosti resp. elastická energia. Je prvým prípadom energie, ktorú neodvodzujeme z práce konštantnej sily, ale sily, ktorá sa mení s predĺžením. Na výpočet tejto práce je použitá grafická metóda výpočtu plochy pod grafom funkcie $F = F(x)$ (obr. 3). Takto postupujú napr. [7, 10], a aj učebnice pre základný vysokoškolský kurz za pomoci integrácie [18]. Práca vonkajšej sily pri natiahnutí pružiny je rovná obsahu pravouhlého trojuholníka pod grafom spomínanej funkcie, z čoho dostaneme

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}kx \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 = E_\mathrm{p}.$$

Práca vykonaná vonkajšou silou v zmysle rovnice (2) sa stotožní s potenciálnou energiou pružiny.



Obr. 3 Práca vonkajšej sily pri naťahovaní pružiny a grafická interpretácia

Niektoré ďalšie učebnice, napr. [9] alebo [11] využívajú pri odvodzovaní vzťahu pre potenciálnu energiu pružnosti ešte ďalší dôležitý krok, a síce, že prácu premennej sily na istom intervale možno vypočítať tak, že do vzťahu $W = Fx$ dosadíme jej priemernú hodnotu $\overline{F}$ na danom intervale. Keďže v prípade pružiny závisí veľkosť sily priamo úmerne od predĺženia pružiny, javí sa na intervale ako opodstatnené použiť aritmetický priemer, priemerná veľkosť vonkajšej sily je tak

$$\overline{F} = \frac{F(0) + F(x)}{2} = \frac{0 + kx}{2} = \frac{1}{2}kx.$$

Po dosadení do $W = \overline{F}x$ dostávame opäť vzťah pre potenciálnu energiu pružnosti. Vo svojej podstate ide o grafickú interpretáciu výpočtu obsahu pravouhlého trojuholníka zmieneného vyššie, ako sa však uvidí, táto úvaha o práci priemernej sily sa javí ako užitočný konštrukt. Z analýzy vyplýva, že všetky skúmané materiály využívajú pri odvodení vzťahu pre potenciálnu energiu pružnosti prácu vonkajšej sily v zmysle rovnice (2) a nepočítajú prácu konanú silou pružiny.

Potenciálna energia gravitačná

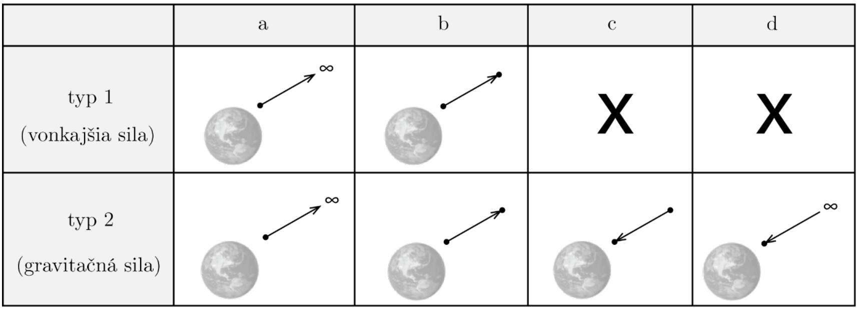
Aj keď sa pojem potenciálnej energie gravitačnej a práce v (radiálnom) gravitačnom poli explicitne nevyskytuje v kurikulárnych dokumentoch [1], venujú sa mu niektoré učebnice pre stredné školy a viaceré materiály pre úvodný vysokoškolský kurz mechaniky. Vzhľadom na analógiu práce v tiažovom poli Zeme a homogénnom gravitačnom poli Zeme sa budeme ďalej venovať prípadu potenciálnej energie v radiálnom gravitačnom poli Zeme. Pokúsme sa premiestniť hmotný bod s hmotnosťou m v gravitačnom poli Zeme z miesta vo vzdialenosti r_1 od stredu Zeme do vzdialenosti r_2 ($r_2 > r_1$). Aby sme zrealizovali popísaný presun, musíme na teleso pôsobiť *silou*, ktorej veľkosť bude minimálne rovná veľkosti *gravitačnej sily* pôsobiacej v danej vzdialenosti medzi týmto telesom a centrálnym telesom, ktoré je zdrojom gravitačného poľa (Zemou). Táto práca je rovná

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM_\mathrm{Z}}{r^2}\,\mathrm{d}r = GmM_\mathrm{Z}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \Delta E_\mathrm{p}.$$

V prípade voľby nulovej hladiny potenciálnej energie v nekonečne, teda pre $r_1 \to \infty$, dostávame pre gravitačnú potenciálnu energiu hmotného bodu v mieste $r_2 = r$ gravitačného poľa Zeme vzťah

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r}. \tag{3}$$

Tento vzťah odpovedá vlastnostiam, ktoré by sme od potenciálnej energie očakávali. S rastúcou vzdialenosťou od Zeme rastie (k nule), keďže konáme stále väčšiu prácu. Takýto postup s pomocou práce vonkajšej sily premiestňujúcej teleso a voľbou nulovej hladiny v nekonečne volí napr. [20]. V učebniciach pre vysokoškolské kurzy sa vyskytujú rôzne spôsoby výpočtu, ktoré však nakoniec vedú k tomuto výsledku. V zdroji [14] počítajú prácu gravitačnej sily pri presune hmotného bodu zo vzdialenosti r od Zeme do nekonečna. V [15] počítajú prácu gravitačnej sily pri presune hmotného bodu zo vzdialenosti r_1 do r_2 od Zeme ($r_2 > r_1$). V [18] počítajú prácu gravitačnej sily pri páde hmotného bodu zo vzdialenosti r_2 do vzdialenosti r_1 od Zeme, pričom opäť $r_2 > r_1$. Na základe rôznorodosti týchto možností v učebniciach sme vytvorili typológiu zvolených postupov (obr. 4). V prípade postupov typu 1 bola na dopátranie sa ku gravitačnej potenciálnej energii použitá práca vonkajšej sily, šípkou je znázornený presun hmotného bodu (medze integrácie). V prípade postupov typu 2 bola na dopátranie sa ku vzťahu potenciálnej energie použitá práca gravitačnej sily.



Obr. 4 Typológia postupov v učebniciach pri odvádzaní vzťahu pre potenciálnu gravitačnú energiu

Aj z vyššie uvedenej typológie zostrojenej na základe učebníc a materiálov pre vysokoškolské kurzy je jasné, že častejšie sa pri odvádzaní vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú využíva výpočet práce gravitačnej sily – vnútornej sily v sústave hmotný bod–Zem. Z analýzy ďalej vyplynulo, že všetky materiály kladú nulovú hladinu potenciálnej energie do nekonečnej vzdialenosti od Zeme.

Ako už bolo spomenuté, túto problematiku spracovali aj niektoré učebnice a materiály pre stredné školy. Najväčším problémom pri odvádzaní vzťahu pre gravitačnú potenciálnu energiu je nedostatočný matematický aparát žiakov, keďže ide o výpočet práce premennej sily, ktorá od vzdialenosti nezávisí lineárne (nemožno tak priamo použiť grafickú metódu ako pri telese na pružine). Aj napriek tomu sa s týmto učivom niektorí autori podrobnejšie zaoberali. V [9] popri veličine intenzita gravitačného poľa zavádzajú priamo veličinu potenciál gravitačného poľa ako pomer

$$\varphi_{\mathrm{g}} = \frac{E_{\mathrm{p}}}{m}.$$

V tomto vzťahu je E_{g} práve potenciálna gravitačná energia hmotného bodu v danom mieste gravitačného poľa. Ďalej je uvedené, že zmena polohy hmotného bodu v gravitačnom poli má za následok zmenu jeho potenciálnej energie $\Delta E_{\mathrm{p}} = |E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}}|$. Výklad vedie ďalej na pojem ekvipotenciálne plochy, čo autori definujú ako body poľa, v ktorých má gravitačné pole rovnaký potenciál. Bližšie k potenciálnej gravitačnej energii sa autori vyjadrujú v časti rozširujúceho učiva na konci kapitoly [9]: „Presný výpočet ukazuje, že keď sa vzdialenosť bodu P od zdroja poľa zmení z hodnoty r_1 na r_2, jeho gravitačná potenciálna energia sa zmení o hodnotu vykonanej práce danej nasledovný vzťahom

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = W = \varkappa m m_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Autori používajú na označenie gravitačnej konštanty písmeno $\varkappa$ namiesto G, čo je v starších materiáloch zvykom. Väčšina učebníc obchádza spomínaný nedostatočný matematický aparát len konštatovaním a uvádza výsledný vzťah, aj to len v rámci rozširujúceho učiva. Práci a potenciálnej energii v radiálnom gravitačnom poli sa okrajovo venuje aj učebnica [8]. Gravitačnú potenciálnu energiu v istom mieste gravitačného poľa definujú pomocou práce, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestnení telesa z tohto miesta poľa na povrch Zeme. V snahe zjednotiť výklad s tiažovou potenciálnou energiou tak netypicky nevolia nulovú hladinu potenciálnej energie v nekonečne ale na povrchu Zeme. V úlohe 3 tej istej strany uvádzajú aj vzťah pre potenciálnu gravitačnú energiu

$$E_{\mathrm{p}} = \varkappa m M_{\mathrm{Z}} \left(\frac{1}{R_{\mathrm{Z}}} - \frac{1}{r} \right).$$

Hodnoty potenciálnej energie gravitačnej tak vychádzajú kladné a rastú s rastúcou vzdialenosťou od Zeme. Ako však správne uvádza napr. [16], nerastú k nekonečnu, ale vďaka závislosti gravitačnej sily od vzdialenosti $\sim 1/r^2$ rastú ku konečnej hodnote. Väčšina učebníc a materiálov, ako sme videli, volia nulovú hladinu v nekonečne. Za cenu konzistentnosti s voľbou nulovej hladiny na povrchu Zeme, ako je to pri tiažovej energii, sa vo vzťahu ponecháva dodatočná konštanta, označme C

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r} + G\frac{mM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} = -G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r} + C.$$

V konečnom dôsledku to však nevadí, pri zisťovaní práce, teda rozdielu potenciálnych energií ΔE_p sa táto hodnota odčíta. Zaujímavý prístup k odvodeniu vzťahu pre gravitačnú potenciálnu energiu, vyskytujúci sa aj v niektorých zahraničných zdrojoch, volia napr. v [21]. Konštatujú, že pri výpočte práce vonkajšej sily pri prenášaní hmotného bodu s hmotnosťou m zo vzdialenosti r_1 do vzdialenosti r_2 od Zeme ($r_2 > r_1$) nastáva problém kvôli nekonštantnej sile. Využívajú však podobný postup ako pri telese na pružine, snažia sa na danom intervale nájsť veľkosť priemernej sily. Vykonaná práca by bola potom $W = \overline{F}\,(r_2 - r_1)$. Pre veľkosti vonkajších síl vo vzdialenostiach r_1 a r_2 platí

$$F_1 = G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1^2}, \qquad F_2 = G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_2^2}.$$

Vzhľadom na závislosť veľkosti sily od vzdialenosti r, ktoré sa vyskytuje v druhej mocnine, konštatujú, že aritmetický priemer nebude asi dobrým odhadom. Ak sa r_2 líši od r_1 líši len málo, zdá sa ako správny odhad priemernej sily použiť geometrický priemer

$$\overline{F} = \sqrt{F_1F_2} = \sqrt{G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1^2}\cdot G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_2^2}} = G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1r_2}.$$

Vykonaná práca vonkajšou silou (rovná zmene potenciálnej energie) je potom

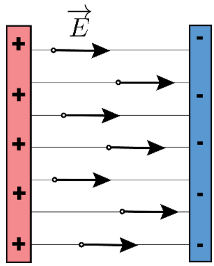
$$\begin{aligned} W = \Delta E_\mathrm{p} = \overline{F}\,(r_2 - r_1) = G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1r_2}\,(r_2 - r_1) &= \\ = GmM_\mathrm{Z}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) &= G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1} - G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_2}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vidieť, že ak $\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p2} - E_\mathrm{p1}$, potom pre gravitačnú potenciálnu energiu dostávame buď uvedený vzťah, alebo sa od neho líši len nejakou konštantou (podobne ako pri zvolení nulovej hladiny na povrchu Zeme). Dôjdeme tak každopádne bez integrálneho počtu ku vzťahu (3).

Nakoniec ešte poznámka k voľbe nulovej hladiny potenciálnej energie gravitačnej. Za voľbu nulovej hladiny na povrchu Zeme hovorí konzistentnosť pri voľbe nulovej hladiny tiažovej energie a následné kladné hodnoty tejto energie. Naopak, v prípade voľby nulovej hladiny v nekonečne, sa zbavíme prebytočnej konštanty pri potenciálnej energii, dostávame však záporné hodnoty energie, ktoré s rastúcou výškou rastú k nule. To ale vo fyzike nie je nič nezvyčajné, podobne v kvantovej mechanike volíme záporné hodnoty energie pre viazané stavy systémov, ktoré rastú k nule. Kladné hodnoty energie potom zodpovedajú voľným stavom systému.

Homogénne a radiálne elektrické pole

Zaujímavé je sa pozrieť v učebniciach a učebných materiáloch na ďalší typ konzervatívneho silového poľa – pole elektrostatické. Keďže v základnej škole sa potenciálnej energii (a potenciálu) v elektrickom poli nevenuje pozornosť, pozrieme sa na materiály pre vyššie stupne škôl, pričom všetky sú uvedené v zozname použitej literatúry. Homogénne elektrické pole býva opisované ako pole medzi dvoma rovnako veľkými rovnobežnými doskami, ktoré nesú rovnako veľké náboje opačného znamienka.



Obr. 5 Zobrazenie homogénneho elektrického poľa medzi dvoma rovnobežnými doskami bežné vo všetkých analyzovaných materiáloch

Za spomenutie stojí skutočnosť, že takýto doskový kondenzátor je vo všetkých analyzovaných učebniciach kreslený spôsobom zobrazeným na obr. 5, dosky takéhoto kondenzátora sú kreslené vo vertikálnej polohe. Aj keď pojem elektrostatická potenciálna energia sa v kurikulárnych dokumentoch priamo nevyskytuje, nachádza sa tam pojem elektrický potenciál, preto s potenciálnou energiou operujú aj viaceré učebnice. V učebnici [22] uvádzajú autori, že potenciálna energia bodového náboja závisí od jeho polohy v elektrickom poli. „Pri pohybe v smere pôsobenia elektrickej sily sa potenciálna energia zmenšuje, pri pohybe proti elektrickej sile sa zväčšuje. Za miesto s nulovou potenciálnou energiou volíme zem a telesá vodivo spojené so zemou (uzemnené).“ Na dopracovanie sa k potenciálu využívajú prácu elektrickej sily pri premiestnení bodového náboja z bodu

A do bodu B elektrického poľa. Vzhľadom na voľbu nulovej hladiny potenciálnej energie na zemi ďalej konštatujú, že potenciál možno vypočítať ako podiel práce, ktorú vykoná elektrická sila pri premiestnení náboja z daného miesta na zem, a tohto náboja. Pre doskový kondenzátor už len uvádzajú výsledný vzťah $\varphi = Ed$. Doskovému kondenzátoru sa venuje aj kniha [12], kde autori zavádzajú spolu s potenciálom aj pojem napätie ako rozdiel potenciálov v daných dvoch bodoch poľa. Ďalej počítajú prácu opäť elektrickej sily pri premiestnení kladného bodového náboja z kladnej dosky na uzemnenú dosku. Dostanú tak

$$\varphi = \frac{W}{Q_0} = \frac{F_\mathrm{e} d}{Q_0} = \frac{Q_0 E d}{Q_0} = Ed.$$

Ďalej ukážu, že v prípade uzemnenej dosky s $\varphi_0 = 0$ ide vlastne o napätie medzi doskami $U = Ed$. Podobne sa postupuje napr. v [13]. V stredoškolských učebniciach a materiáloch pre tento stupeň školy je teda využívaná práca vnútornej sily v zmysle rovnice (2). Autori teda nechávajú na teleso pôsobiť silu poľa, ako to bolo v niektorých prípadoch v tiažovom poli, nechávajú teleso „padať“. Zaujímavá je ďalej skutočnosť, že pri tomto odvodzovaní ani v jednom materiáli nebola použitá analógia s tiažovým poľom Zeme, autori by sa tak mohli odvolať na poznatky, ktoré si žiaci už osvojili. V učebniciach býva tematizované aj radiálne elektrické pole od bodových nábojov. V učebnici [22] uvádzajú autori, že ak sa priblíži k pevnému bodovému náboju Q vo vákuu do vzdialenosti r bodový náboj q rovnakého znamienka, získa sústava potenciálnu elektrickú energiu

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}.$$

V poznámke pod čiarou uvádzajú, že na odvodenie tohto vzťahu je nutné použiť integrálny počet. Podobne ako v [12] kladú nulovú hodnotu potenciálu (tým aj potenciálnej energie) na zem a uzemnené telesá. Uvádzajú aj, že potenciál vo veľkej vzdialenosti od osamoteného bodového náboja je nulový.

Aj napriek nespornej analógii s tiažovým (gravitačným) a elektrostatickým poľom vystáva rozdiel na mieste, kedy necháme na elektrický náboj pôsobiť výhradne len silu elektrického poľa (teleso v tiažovom/gravitačnom poli necháme padať). Tento problém podrobnejšie berú do úvahy autori vysokoškolských učebníc. V [23] autori zdôrazňujú, že ak by sme nechali na nejaký náboj q pôsobiť iba sily od elektrického poľa, bude sa náboj pohybovať zrýchlene, začne vyžarovať a časť energie, ktorú získal, vyžiari do okolitého priestoru. Preto sa vysokoškolské učebné texty opierajú hlavne o zavedenie potenciálu a potenciálnej energie cez prácu vonkajšej sily, ktorá prekonáva silu elektrickú. Náboj v elektrickom poli je tak posúvaný pomaly po infinitezimálnych kúskoch, s čím sa tieto texty snažia eliminovať problém s pohybom náboja. Obdobným postupom zavádza potenciál vo svojej známej učebnici aj A. Tirpák [24]. Na záver tak možno zhrnúť, že z analyzovaných učebníc a materiálov pre stredné školy nevyplynulo dostatočné previazanie tiažového a elektrostatického poľa ako dvoch typov konzervatívneho silového poľa. Javy v elektrostatickom poli sú zložitejšie v tom zmysle, že naproti tiažovému (gravitačnému) poľu sa okrem príťažlivých interakcií vyskytujú aj odpudivé v závislosti od znamienok nábojov. Názorné porovnanie týchto polí by však mohlo byť dobrou pomocou ako prekonať značnú abstraktnosť v prípade elektrostatiky u žiakov a študentov.

Návrh výkladu tém o energii

Vzhľadom na diskusiu vyššie uvedených tém spracovaných v učebniciach a materiáloch pre rôzne stupne škôl a načrtnutí niektorých slabých miest a otázok považujeme za konštruktívne uviesť návrh výkladu tém o energii tak, aby spĺňoval spomenuté požiadavky. Vzhľadom na rozsiahlosť témy nebudeme uvádzať celý výkladový text, skôr sme sa zamerali na kľúčové body výkladu, to znamená jednak postupnosť tém, riešenie problematických miest s ich odôvodnením a naznačením smeru, kam by sa mal výklad uberať. Pre celý výklad navrhujeme pri odvodzovaní vzťahov pre akýkoľvek typ potenciálnej energie používať práce vonkajších síl, ktoré prekonávajú silu poľa.

Potenciálna energia tiažová. V prípade tiažového poľa navrhujeme používať myšlienkový experiment s rovnomerným dvíhaním hmotného bodu (telesa) z výšky h_1 do výšky h_2 nad podložkou. Vonkajšia sila ($\vec{F}_\mathrm{v} = -\vec{F}_\mathrm{G}$) pôsobí v smere posunutia hmotného bodu, koná tak kladnú prácu ($W > 0$). Práca vykonaná vonkajšou silou sa prejaví ako nárast potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem

$$W = F_\mathrm{v} s = mg \cdot (h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 = E_\mathrm{p2} - E_\mathrm{p1} = \Delta E_\mathrm{p} > 0.$$

Nulovú hladinu potenciálnej energie možno voliť ľubovoľne, napr. na povrchu zeme. Za pomoci experimentu s kladkou uvedeného na obr. 2 je vhodné ukázať, že v prípade práce tiažovej sily pri padaní telesa z výšky

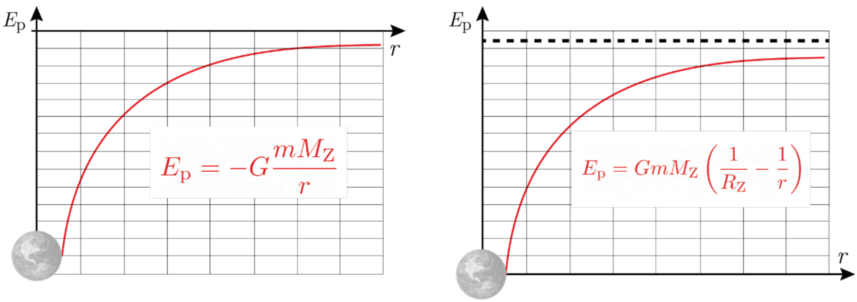
h_2 do výšky h_1 dochádza k úbytku potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem, a síce $W = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$. Práca vonkajšej aj tiažovej sily závisí len na počiatočnej a koncovej výške, nie na trajektórii hmotného bodu. Tento výklad môžeme ďalej naviazať na prípad, kedy teleso padá vo vákuu a pôsobí naň len tiažová sila – sústava hmotný bod–Zem je izolovaná, mechanická energia v nej sa zachováva $E =$ konšt.

Potenciálna energia pružnosti. Vo výklade potenciálnej energie pružnosti odporúčame postupovať ako väčšina učebných textov, to znamená zdôrazniť skutočnosť, že sila pružnosti nie je konštantná ale je lineárnou funkciou predĺženia pružiny, pre jej veľkosť teda platí $F = kx$. V myšlienkovom experimente pružinu naťahujeme vonkajšou silou, ktorá vyrovnáva silu pružnosti pružiny, ktorá sa ju snaží vrátiť do pôvodnej polohy ($\vec{F}_{\mathrm{v}} = -\vec{F}_{\mathrm{p}}$). Odporúčame začať najprv postupom, kedy prácu premennej sily určíme pomocou jej priemeru, v tomto prípade aritmetického, a dostaneme tak $W = \overline{F}x$. Tento postup sa ukázal lepší aj pri odvodení vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú, kde grafická metóda v strednej škole zlyháva. Následne ukázať súvislosť s grafom na obr. 3.

Potenciálna energia gravitačná. Pri výklade a odvádzaní vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú odporúčame využiť práce vonkajšej sily, ktorá premiestňuje hmotný bod v gravitačnom poli Zeme zo vzdialenosti r_1 do vzdialenosti r_2, pričom $r_2 > r_1$. Opäť môžeme zdôrazniť, že nezáleží na trajektórii presunu hmotného bodu, gravitačné pole je konzervatívne. Ako pri pružine môžeme použiť spomenuté odvodenie vzťahu za pomoci priemernej sily, pričom tentokrát vzhľadom na závislosť pôsobiacej sily od vzdialenosti použijeme geometrický priemer. Odvodíme tak všeobecný vzťah

$$W = GmM_{\mathrm{Z}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \Delta E_{\mathrm{p}} > 0.$$

Práca vonkajšej sily tak vedie k nárastu potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem. Voľba nulovej hladiny je opäť ľubovoľná, už skôr sme uviedli výhody a nevýhody voľby nulovej hladiny v nekonečne a na povrchu Zeme. V prípade voľby nulovej hladiny v nekonečne je treba upozorniť na záporné hodnoty potenciálnej energie, ktorá však rastie (k nule). Zmena potenciálnej energie tak vždy vychádza ako kladná $\Delta E_{\mathrm{p}} > 0$. V prípade, že sa rozhodneme voliť nulovú hladinu konzistentne na povrchu Zeme, opäť treba ukázať, že hodnoty potenciálnej energie sú kladné a rastú, nie však do nekonečna, ale ku konečnej hodnote. Navrhujeme v takomto prípade žiakom či študentom predstaviť obe možnosti a diskutovať ich adekvátnosť. Ako názorná pomôcka môže poslúžiť obr. 6.



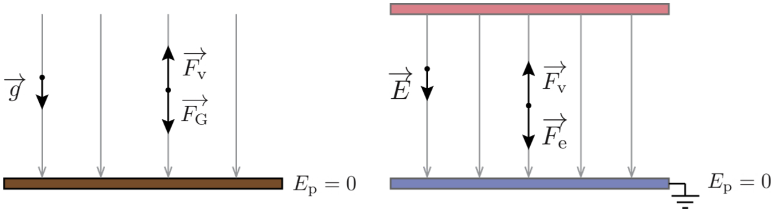
Obr. 6 Graf závislosti potenciálnej energie gravitačnej od vzdialenosti od centrálneho telesa (Zeme) pre voľbu nulovej hladiny v nekonečne (vľavo) a voľbu nulovej hladiny na povrchu Zeme (vpravo)

Ako už bolo spomenuté v úvode tohto príspevku, znalosť vzťahu pre túto energiu nám umožní aj odvodiť, nie len oznámiť, vzťah pre parabolickú (únikovú) rýchlosť, ukážeme aj postup s potenciálnou energiou, kedy nulovú hladinu volíme na povrchu Zeme. Ak raketa štartuje z povrchu Zeme, je jej potenciálna energia nulová, rýchlosť rakety nech je v_p. Po úniku z gravitačného poľa Zeme, teda pre $r \to \infty$, dosiahne kinetická energia rakety nulovej hodnoty a potenciálna energia je $E_p = GmM_Z/R_Z$. Energetická bilancia tak dá

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + 0 = 0 + \frac{GmM_Z}{R_Z}; \iff v_p = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}}.$$

Potenciálna energia elektrostatického poľa. V prípade odvodenia vzťahu pre potenciálnu energiu elektrostatického poľa odporúčame začať poľom homogénnym, medzi dvoma nesúhlasne nabitými rovnobežnými platňami. Konzistentne by bolo vhodné využiť pri prenášaní náboja v elektrickom poli prácu vonkajšej sily, ktorá prekonáva silu elektrickú ($\vec{F}_v = -\vec{F}_e$), čím sa vyhneme aj spomínanému problému zrýchleného pohybu elektrických nábojov. Čo v učebniciach a materiáloch pre všetky typy škôl nebolo zvykom, bolo by vhodné čo najviac vyťažiť z analógie medzi tiažovým a homogénnym elektrickým poľom. Táto situácia sa priam ponúka, keď len netypicky v nákresoch pootočíme platne kondenzátora (obr. 7).

Tu už priamo vidíme, že podobne ako v tiažovom poli, aj v homogénnom elektrickom poli vedie presun častice v smere vonkajšej sily k nárastu potenciálnej energie, pohyb v smere elektrickej sily (náboj necháme „padať“ podobne ako v tiažovom poli) vedie k zníženiu potenciálnej energie sústavy.



Obr. 7 Využitie analógie tiažového poľa a homogénneho elektrického poľa

Ďalej vidíme aj zhodnú voľbu nulovej hladiny potenciálnej energie na zemi, resp. na telesách so zemou vodivo spojených. Práca vonkajšej sily pri prenášaní kladného bodového náboja zo vzdialenosti d_1 do vzdialenosti d_2 v smere od zápornej dosky ku kladnej je

$$W = F_v\,(d_2 - d_1) = QEd_2 - QEd_1 = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p > 0.$$

Práca vonkajšej sily tak vedie k nárastu potenciálnej energie sústavy. Ak označíme vzdialenosť dosiek d a nulovú hladinu potenciálnej energie zvolíme na uzemnenej doske, je potenciálna energie bodového náboja pri kladnej doske $E_p = QEd$. Odtiaľ už je len krok k zavedeniu veličiny potenciál. V prípade potenciálnej energie v radiálnom gravitačnom poli od nábojov možno taktiež vyjsť z analógie s radiálnym gravitačným poľom. V prípade elektrostatického poľa je však situácia zložitejšia, keďže podľa znamienok nábojov môže dôjsť aj k odpudivej interakcii, na rozdiel od gravitačného poľa, ktoré sa prejavuje čisto príťažlivými interakciami. Obdobným postupom pomocou geometrického priemeru môžeme dôjsť aj v strednej škole ku vzťahu

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

V prípade príťažlivej interakcie, kedy sú znamienka nábojov nesúhlasné, môžeme voliť napr. $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -q$, čím dostaneme záporné hodnoty potenciálnej energie ako pri potenciálnej energii gravitačnej s voľbou nulovej hladiny v nekonečne (potenciálna energia sústavy dvoch nábojov je nulová, keď sú náboje od seba veľmi ďaleko). V prípade odpudivej interakcie (znamienka nábojov sú súhlasné) dostávame kladné hodnoty elektrostatickej potenciálnej energie sústavy dvoch nábojov.

Záver

V tomto príspevku sme sa snažili podať prehľad o metodických postupoch používaných v učebniciach pri odvodení vzťahov pre potenciálnu energiu, previazanosti tém potenciálna energia v tiažovom, gravitačnom a elektrostatickom poli. Na základe analýzy učebníc a materiálov pre základné, stredné, ale aj vysoké školy sme dospeli k záveru, že pri výklade a odvodzovaní vzťahov pre rôzne druhy potenciálnej energie sú používané rôznorodé metodické postupy a skoro každý autor sa s touto témou vysporiadal inak. Naším cieľom bolo na základe tejto analýzy načrtnúť aspoň možný výklad týchto tém tak, aby rešpektoval zistené skutočnosti a pri odvodzovaní vzťahov pre potenciálnu energiu bol konzistentný. Dôvodom pre takéto konanie môže byť už len jedna zo základných zásad vyučovacieho procesu – zásada systematickosti, ktorá vyjadruje požiadavku logicky usporiadaného didaktického systému učiva. Netvrdíme, že nami navrhnutá postupnosť a poznámky k výkladu sú jediným správnym postupom, sme však presvedčení, že pri kladení dôrazu na väčšiu previazanosť tém potenciálna energia v gravitačnom/tiažovom a elektrostatickom poli môže byť u žiakov a študentov učivo o elektrostatike ľahšie uchopiteľné. Niektoré časti z uvedeného výkladu autor článku už dlhšie využíva vo svojej praxi a osvedčili sa tak aj priamo vo vyučovaní fyziky.

Literatúra

[1] *Inovovaný Štátny vzdelávací program, Prílohy ISCED 3.* [online]. [cit. 2025-05-01]. Dostupné z: https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/inovovany-svp-gymnazia-so-stvorrocnym-patrocnym-vzdelavacim-programom/.

[2] *Lapitková, V. a kol.*: Fyzika pre 8. ročník základnej školy a 3. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. Vydavateľstvo Matice slovenskej, Martin, 2012.

[3] *Kolářová, R. a kol.*: Fyzika pre 8. ročník základných škôl. 2. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2001.

[4] *Kolářová, R., Bohuněk, J.*: Fyzika pro 8. ročník základní školy. 1. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 1999.

[5] *Randa, M. a kol.*: Fyzika 8 – učebnice pro základní školu a víceletá gymnázia. 1. vydanie. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2018.

[6] *Janovič, J. a kol.*: Fyzika pre 9. ročník základných škôl. 1. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2000.

[7] *Koubek, V. a kol.*: Fyzika pre 1. ročník gymnázia a 5. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 3. vydanie. Združenie EDUCO, Nitra, 2019.

[8] *Vachek, J. a kol.*: Fyzika pre 1. ročník gymnázií. 3. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1993.

[9] *Scholtz, E., Kireš, M.*: Fyzika dynamika pre osemročné gymnáziá. 2. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2019.

[10] *Svoboda, E. a kol.*: Fyzika pro gymnáziá – mechanika. 5. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2016.

[11] *Sklenák, L., Dvořák, D.*: Fyzika pro střední školy – mechanika. 1. vydanie. Fortuna, Praha, 1997.

[12] *Svoboda, E. a kol.*: Přehled středoškolské fyziky. 6. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2019.

[13] *Tarábek, P. a kol.*: Zmaturuj z fyziky. 1. vydanie. Didaktis, Bratislava, 2006.

[14] *Halliday, D. a kol.*: Fyzika 1. 2. vydanie. VUTIUM, Brno, 2013.

[15] *Hlavička, A. a kol.*: Fyzika pro pedagogické fakulty 1. 2. vydanie. Státní pedagogické nakladateľství, Praha, 1971.

[16] *Baník, I. a kol.*: Fyzika netradične – mechanika. 1. vydanie. Alfa, Bratislava, 1989.

[17] *Zelenický, Ľ. a kol.*: Mechanika a molekulová fyzika. Štatistické a evidenčné vydavateľstvo tlačív, Bratislava, 2008.

[18] *Sklenák, L.*: Mechanika – učebný text. Katedra fyziky, Ostrava, 2008.

[19] *Kluvanec, D. a kol.*: Kreatívne poznávanie vo fyzike. 1. vydanie. Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra, 2005.

[20] *Veselský, J., Lukovičová, J.*: Fyzika – Mechanika, pružnosť a pevnosť, hydromechanika. STU, Bratislava, 2007.

[21] *Jarešová, M., Volf, I.*: Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 81 (2006), č. 3, s. 8–20.

[22] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnáziá. Elektřina a magnetizmus. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2008.

[23] *Dillinger, J., Halúsková, S.*: Základný bakalársky kurz pre technické univerzity. [online]. STU, 2003 [cit. 2025-05-01]. Dostupné z: `http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20II/8%20kapitola/elstatPole1-10.htm`.

[24] *Tirpák, A.*: Elektromagnetizmus. 4. vydanie. Iris, Bratislava, 2014.