Zajímavé matematické úlohy

V novém ročníku našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 307

Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má protější dvojice stran rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají shodné obsahy.

Jiří Blažek

Úloha 308

Kolika způsoby je možné uspořádat posloupnost všech přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$ do kruhu tak, aby každé číslo bylo dělitelem součtu dvou sousedních čísel. Takové způsoby, které lze získat jeden z druhého otočením nebo osovou souměrností, považujeme za jeden způsob. Úlohu řešte pro a) $n = 2025$, b) $n = 2026$.

Jaroslav Zhouf

V následující části uvádíme řešení úloh 295 a 296, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (34.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 303 Dokažte, že pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku platí nerovnost

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{9}{8}.$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Řešení. Užitím součtového vzorce pro funkci sinus platí

$$\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma).$$

Jelikož $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ dostáváme z vlastností funkce sinus

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha,$$

a proto

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma=$$
$$=\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)=\sin^2\alpha. \quad (1)$$

Obdobně podle součtových vzorců pro kosinus platí s využitím jeho vlastností

$$\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{2}\big(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\big)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\cos(\beta-\gamma)-\cos(180^\circ-\alpha)\big)=\frac{1}{2}\big(\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha\big).$$

Proto platí

$$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha. \quad (2)$$

Součtem předcházejících rovností (1) a (2) tak dostaneme po několika úpravách s využitím goniometrické jedničky a omezenosti funkce kosinus požadovanou nerovnost

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$
$$=\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha=$$
$$=1+\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos^2\alpha=$$
$$=1+\frac{1}{8}\cos^2(\beta-\gamma)-\frac{1}{2}\Big(\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\Big)^2\le 1+\frac{1}{8}-0=\frac{9}{8},$$

přičemž rovnost nastává, když $\cos(\beta-\gamma)=1$ a $\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)=0$, tedy když $\beta=\gamma$ a $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Odkud již jednoduchým dopočtem zjistíme, že rovnost nastává pro $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, tedy v případě rovnostranných trojúhelníků.

Jiné řešení. Podle vzorce pro kosinus součtu platí

$$\sin\beta\sin\gamma=\cos\beta\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma),$$

jelikož $\beta+\gamma=180^\circ-\alpha$, platí $\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha$. Tedy

$$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha.$$

Přičtením k rovnosti (1) tak dostaneme

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \\ = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Abychom dokázali požadovaný vztah, stačí dokázat nerovnost

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}. \tag{3}$$

Tuto nerovnost můžeme považovat za známou[1)] nebo ji dokázat pomocí Jensenovy nerovnosti následujícím způsobem. Pokud se jedná o trojúhelník pravoúhlý či tupoúhlý, je kosinus jednoho z vnitřních úhlů nekladný a druhé dva kladné, proto levá strana nerovnosti (3) je nekladná a daná nerovnost tak platí. V případě ostroúhlého trojúhelníku jsou všechny kosiny kladné, podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \left(\frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\right)^3.$$

Jelikož funkce kosinus je na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ konkávní, platí podle Jensenovy nerovnosti dále

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \le \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

což dokazuje nerovnost (3). Rovnost v obou nerovnostech nastane v případě $\alpha = \beta = \gamma$, tedy v případě rovnostranných trojúhelníků.

Poznámka. Sečtením rovností (1) pro tři permutace úhlů α, β, γ dostaneme

$$2(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) = \\ = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Nerovnost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4},$$

[1)] Najdete ji jako úlohu B–S–2 17. ročníku Matematické olympiády na str. 71, kde je uveden důkaz pomocí součtových vzorců, jako příklad 10 v *S. Horák* Nerovnosti v trojúhelníku z edice Škola mladých matematiků nebo v *R. Smýkalová* Goniometrické funkce na str. 171.

která dokazuje požadované tvrzení, bychom opět mohli považovat za známou[2)] nebo ji znovu můžeme dokázat užitím Jensenovy nerovnosti. Tuto nerovnost nelze ovšem použít přímo, protože funkce $\sin^2 x$ je konvexní pouze na intervalu $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, což si neuvědomil značný počet řešitelů. Dá se ovšem postupovat následujícím způsobem. Nechť alespoň dva úhly v trojúhelníku, bez újmy na obecnosti β, γ, jsou v intervalu $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, potom podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\frac{1}{2}(\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \leq \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} = \\ = \sin^2 \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

s rovností v případě $\beta = \gamma$. Platí tak

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq 1 - \cos^2 \alpha + 1 + \cos \alpha = \\ = \frac{9}{4} - \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

Rovnost v této nerovnosti nastane v případě $\alpha = \beta$ a $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, tedy v případě $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Pokud však nejvýše jeden úhel v trojúhelníku, řekněme γ, je z intervalu$\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, potom zřejmě platí

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 < \frac{9}{4}.$$

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Bartosz Depta*, *Michał Fronczek* a *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Jakub Hříbal*, GJB Beroun, *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská, *Lukáš Komín*, G Praha 4, Opatov, *Eva Martikánová*, MG Opava a *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní.

Neúplná řešení zaslali: *Marin Bryja* a *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Helena Muchová*, GJK Praha 6, *Ondřej Nevěřil*, G Zábřeh, *Lucian Poljak*, GJŠ Přerov, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec,*Štěpán Sikora*, G Praha 7, Nad Štolou, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova a *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

[2)] Jedná se o důsledek poznámky 1 k příkladu 24 a sinové věty v *S. Horák* Nerovnosti v trojúhelníku z edice Škola mladých matematiků nebo přímo o nerovnost v *R. Smýkalová* Goniometrické funkce na str. 171.

Úloha 304

Třída na začátku hodiny tělocviku nastupuje do řady s pravidelnými rozestupy, každý žák na svoji pevně přiřazenou značku. Horáček ale jednou přesvědčil své spolužáky, aby místo toho všichni nastoupili na značky tak, že součet vzdáleností všech žáků od aktuálně obsazené k předem přiřazené značce byl nejvyšší možný. Určete počet takových pořadí pro $2n$ žáků.

David Hruška

Řešení. Nechť je v řadě žáků na zemi nakreslena čára mezi značkami n a $n+1$. Sporem dokážeme, že každý z žáků musí po výměně navržené Horáčkem překročit tuto čáru, tedy přejít na druhou polovinu. Pokud by totiž existoval takový žák, řekněme A, který zůstane ve své polovině a přejde z pole a na pole a', potom ve druhé polovině existuje žák B, který také neopustí svou polovinu a přejde z pole b na pole b'. Ovšem pokud by žák A přešel z pole a na pole b' a žák B přešel z pole b na pole a' (a všichni ostatní přešli na stejná pole), potom by byl součet vzdáleností žáků od svých značek větší. To dokážeme rozborem jednotlivých případů:

- Nechť pozice a' a b' leží mezi pozicemi a a b. Pokud by žák A šel z a na a' a žák B z b na b', tak by se nikde neminuli, ušli by tedy dohromady menší vzdálenost než z a na b. Když půjdou z a na b' a z b na a', tak se minou a musí dohromady ujít větší vzdálenost než z a na b.
- Nechť jedna z pozic, řekněme a', leží z pohledu druhého žáka za pozicí a a druhá, b', leží mezi a a b. Potom žák B při své cestě z b do a' mine značku b', dojde k a a ujde vzdálenost od a do a', ujde tak větší vzdálenost, než kdyby šel A z a do a' a B z b do b'.
- Nechť obě pozice a', b' neleží mezi a a b. Pokud žáci půjdou z a na b' a z b na a', pak každý ujde vzdálenost mezi a a b a ještě vzdálenost, kterou by ušel druhý žák při původní cestě.

Tedy každý z žáků musí při výměně navržené Horáčkem být v opačné polovině než je jeho původní místo. Uvědomíme si, že pak je součet vzdáleností všech žáků od původní pozice stejný nezávisle na tom, na kterou značku se ve druhé polovině postaví. To platí, jelikož pro žáky z první poloviny můžeme mezi každými dvěma pozicemi jednoho žáka uvažovat vzdálenost od jeho původní značky k čáře a od čáry k nové značce a tyto dvě vzdálenosti bijetivně odpovídají vzdálenostem (obecně jiných) žáků ze druhé poloviny.

Tedy n žáků z první poloviny se může na druhou polovinu postavit $n!$ způsoby a žáků druhé poloviny se na první polovinu může postavit také $n!$ způsoby, celkem tedy žáci mohou zaujmout $(n!)^2$ pořadí navržených Horáčkem.

Jiné řešení. Nechť vzdálenost mezi značkami je 1. Označme $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ pořadí žáků, v jakém běžně stojí při hodině tělocviku a a_i pořadí žáka i po výměně. Pak součet vzdáleností jednotlivých žáků od svých značek je

$$S = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_{2n} - 2n|.$$

Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota čísla x je $\pm x$, bude po odstranění absolutních hodnot ve výsledném součtu mít polovina z čísel $1, 2, \ldots, 2n$, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ znaménko plus a polovina znaménko minus. Jelikož hodnoty a_i jsou navzájem různé, je a_i bijekce množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na sebe. Součet S tak bude největší, pokud budou mít všechna čísla menší nebo rovna než n znaménko mínus a zbývající znaménko plus, tedy

$$\begin{aligned} S \le 2\bigl(2n + (2n-1) + \ldots + (n+1)\bigr) - 2\bigl(n + (n-1) + \ldots + 1\bigr) = \\ = n(3n+1) - n(n+1) = 2n^2. \end{aligned}$$

Rovnost zde nastane, pokud v každém rozdílu $|a_i - i|$ bude v případě $i \le n$ platit $a_i \ge n+1$ a naopak, pokud $i \ge n+1$, potom $a_i \le n$. Takových pořadí a_i je $(n!)^2$, stejně jako v předchozím řešení.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Michał Fronczek* a *Filip Zdebik*, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko). *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Helena Muchová*, GJK Praha 6 a *Andrea Plecháčková*, G Jablonec nad Nisou.

V minulém čísle jsme ještě zapomněli uvést *Michała Fronczeka*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko), který správně vyřešil obě úlohy 301 i 302. Tímto se mu omlouváme.

Pavel Calábek