Objavovanie na hodinách matematiky II

MATÚŠ STÁŇA

Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš, SLOVENSKO

Teória grafov vytvára veľmi vhodné prostredie pre rozvoj konštruktivistického prístupu vo vyučovaní. V článku *Objavovanie na hodinách matematiky I* [1], sme čitateľom ponúkli niektoré inšpirácie ako problematiku využiť. Zamerali sme sa na problém nájdenia najkratšej (minimálnej) cesty v grafe, ďalej sme sa venovali hľadaniu minimálnej kostry grafu a v neposlednom rade sme prostredníctvom úlohy načrtli problém rovinného grafu. V nasledujúcom texte chceme na tieto úlohy nadviazať a pridať ďalšie.

Úlohy predstavené v predchádzajúcom článku sa môžu niektorým čitateľom zdať zložité. V tomto texte sa preto pozrieme na problematiku, s ktorou sme sa všetci stretli už pravdepodobne v predškolskom veku. Patrí tiež do okruhov riešených v rámci teórie grafov. Ide o kreslenie jedným ťahom. Tento problém preberieme z dvoch uhlov pohľadu: či už ako voľné kreslenie, alebo ako kreslenie predpísaným smerom. Budeme sa teda venovať neorientovaným i orientovaným grafom. Použité úlohy môžu slúžiť ako určitá propedeutika k tým, ktoré sme predstavili v predchádzajúcom článku. Okrem toho sme do tohto textu pridali aj doplnok: dôkaz Eulerovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe. Ide možno o akademickejší problém, ktorý sa odlišuje od ostatných predstavených úloh. Ku všetkým je totiž možné nájsť určitý reálny obraz. Dôkaz matematickej vety sa z tohto rámca vymyká. Na druhej strane predstavuje vhodné prostredie pre pochopenie princípov dokazovania matematickou indukciou. Takéto použitie matematickej indukcie pokladáme pre žiakov za oveľa prijateľnejšie, ako keď ju aplikujeme napr. v teórii čísel. Pritom je potrebné zdôrazniť, že nám nejde o dôkaz ako taký. Je to možnosť ďalšieho rozvoja myslenia žiaka. Len s malou pomocou učiteľa dokáže dôkaz uskutočniť aj žiak sám. A to aj bez vedomostí o tom, že práve urobil indukčný dôkaz.

Predtým, ako prejdeme k jednotlivým úlohám, zhrnieme naše základné teoretické východiská. Toto zhrnutie bude len stručné, nakoľko v predchádzajúcom článku sme sa mu venovali podrobnejšie. Veríme, že aj tento text bude pre učiteľov z prostredia základných i stredných škôl zaujímavým podnetom. Okrem samotných úloh autor dopĺňa aj svoje postrehy a skúsenosti, ktoré nadobudol pri ich riešení so žiakmi.

Teória grafov a aplikovanie konštruktivizmu v matematike

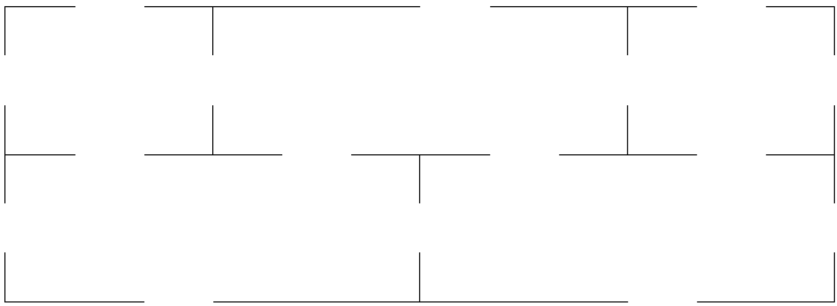
Vytvoriť pre žiakov priestor objavovať, v mysli konštruovať, nie je vôbec jednoduché. Jednou z hlavných úloh učiteľa je zvoliť vhodný materiál, s ktorým žiak bude pracovať. V matematike ide o výber problémov a úloh, ktoré žiak rieši. Teória grafov predstavuje v tomto smere správnu voľbu. Dôvodom je najmä to, že eliminuje dva základné riziká, s ktorými sa stretávame, ak chceme žiakom zadať úlohu vedúcu k premýšľaniu a používaniu vyšších poznávacích funkcií. A to nielen vo faktickej rovine, ale aj v rovine konceptov, procedúr či na metakognitívnej úrovni.

Prvým rizikom je často to, že úloha je v podstate príliš jednoduchá, pre žiaka rutinná. Pri jej riešení žiak nepotrebuje nič odhaliť, len aplikuje naučené postupy. Pre mozog je to jednoduchšia a časovo efektívnejšia cesta. Preto nevzniká motivácia objavovať. Na druhej strane, ľahko môže vzniknúť aj opačná situácia. Úloha je tak náročná, že žiak nevie nič objaviť, stratí motiváciu a riešenie ukončí. Teória grafov predstavuje problémy, kde žiak nepotrebuje žiadne zvláštne teoretické poznatky. Môže experimentovať, skúšať a hľadať riešenia. Vytvára sa priestor pre tímovú prácu, je prítomná určitá hravosť. S úlohou sa žiaci vysporiadajú spravidla rôzne podľa spôsobu ich myslenia. Ak to zjednodušíme, úloha sa ako keby prispôsobovala potenciálu žiaka. Každý ju nejak uchopí a začne. Aj tu však môžu vzniknúť situácie, keď žiak potrebuje pomoc. Vtedy je dôležitá rola učiteľa a jeho mentorský prístup.

Okruhy teórie grafov minimálne v slovenskom prostredí nie sú súčasťou vzdelávacích štandardov pre základné či stredné školy. Na štandardných vyučovacích hodinách má učiteľ aj obmedzené možnosti aplikovať metódy konštruktivistického prístupu k vyučovaniu matematiky. Je tlačený časom a rozsahom učiva, ktoré musí so žiakmi prejsť. Predsa však školy majú možnosť vytvoriť prostredie, ktoré bude pre začlenenie aj týchto prístupov priaznivejšie. Možno taký priestor vznikne na štandardných hodinách na začiatku či konci školského roka alebo vie škola otvoriť pre žiakov rôzne nepovinné či voliteľné predmety. Pripomenieme, že autor úlohy zaraďuje počas voliteľného predmetu *Seminár z matematiky*. Seminár je organizovaný ako dvojhodinový blok, preto sú úlohy dizajnované na cca 70 minút. Spätné väzby k riešeniu úloh, ktoré v článku používame, sú z hodín, kde ich riešili žiaci tretieho ročníka gymnázia, resp. siedmeho ročníka osemročného gymnázia. Teda žiaci vo veku 17, resp. 18 rokov. Žiaci si voliteľný predmet *Seminár z matematiky* na škole, kde autor vyučuje, vyberajú z rôznych dôvodov. Nejde nevyhnutne o žiakov, ktorí by chceli z matematiky maturovať. Na prípravu na maturitu slúžia v portfóliu školského vzdelávacieho programu iné predmety.

Problém 1

Novákovci si kúpili nový byt. Ide o veľký podkrovný byt, ktorý je celý obohnaný balkónom. Schéma bytu spolu s východmi na balkón je znázornená na obr. 1. Pani Nováková má niekedy problémy so spánkom, preto sa zvykla často po byte prechádzať. Pri svojich potulkách v zákutiach bytu jej prišla na um otázka, či je možné prejsť bytom na jednej prechádzke tak, aby človek prešiel každými dverami v byte práve raz. Je to možné? A ak áno, ako by cesta mala vyzerať?



Obr. 1

Z pohľadu teórie grafov žiaci hľadajú eulerovský ťah, pričom úloha nešpecifikuje, či má byť otvorený alebo uzavretý, t. j. riešiteľ môže, ale aj nemusí skončiť na mieste, kde začínal. Aby sme však úlohu vnímali ako časť teórie grafov, je potrebné si jej reprezentanta v podobe grafu vytvoriť. Čo bude predstavovať vrcholy a hrany tohto grafu?

Tieto otázky však učiteľ žiakom nedával a nechal ich voľne pracovať. Postup, ktorý žiaci zvolili, bol očakávaný. A pokladáme ho aj za správny a najlepší možný, ak nám ide o ich samostatnú tvorivú prácu. Začali skúšať. Chytili ceruzky, prípadne tablety a perá a začali izbami prechádzať. Možno by sme ako učitelia čakali nejakú abstraktnejšiu analýzu úlohy, a to najmä v prípade starších žiakov, s ktorými autor túto úlohu riešil. No to sa nestalo. Všetci začali skúšať. Ako sme už ale uviedli, tento postup od žiakov považujeme za správny. Experimentovaním a modelovaním sa dá všeličo objaviť. Týmto spôsobom sa učíme a je len pozitívne, ak sa žiaci neboja začať riešiť problém, i keď nevedia ako. Aj v tomto smere sa ukazuje potenciál problémov z oblasti teórie grafov. Sú „nízkoprahové“. Nepredstavujú prekážku pri pokusoch o ich riešenie. Netreba nič ťažké vymýšľať. Jednoducho sa začne experimentovať.

Žiaci experimentovali a skúšali tak 10–15 minút bez zásahu učiteľa. Tento časový interval je potrebné prispôsobiť veku žiakov a aktuálnej situácii na hodine. Po tomto čase sa učiteľ začal pýtať, na čo žiaci prišli. Niektorí veľmi proaktívne svoje objavy komunikovali, medzi mnohými sa prekrývali. Cestu cez všetky dvere zatiaľ nenašli, no zistili že obrázok je do určitej miery symetrický, že nemusia skúmať osobitne situácie, keď začínajú v ľavej hornej izbe a pravej hornej izbe. Je to prakticky to isté. Podobných symetrií je v úlohe viacero. Dokonca vznikla prirodzená spolupráca medzi žiakmi. Jeden mal preveriť začiatok vedúci tými dverami a niekto ďalší inými dverami. Jeden zo žiakov prišiel so zaujímavou myšlienkou, že ak existuje nejaká cesta, ktorá spôsobí, že každými dverami prejdeme práve jedenkrát, je jedno, v ktorej miestnosti začneme. V tomto bode zasiahol aj učiteľ, ktorý sa ostatných žiakov opýtal, či s touto myšlienkou súhlasia. Učiteľ chcel, aby sa nad ňou zamysleli a neprebrali ju nekriticky. Nakoniec sa žiaci dohodli, že toto platí len vtedy, ak je začiatok a koniec cesty v tej istej izbe (prípadne na balkóne), čiže ak bude ťah uzatvorený. Nebolo náročné riadiť úlohu tak, aby žiaci sami spoznali paralelu úlohy o prechádzkach v novom byte s úlohami, ktoré riešili už ako deti a ktoré sa týkali kreslenia jedným ťahom. V triede si spomenuli najmä na kreslenia domčeka. Táto analógia bola pre učiteľa tiež zaujímavá, nakoľko mu umožnila viesť žiakov k tomu, aby si úlohu o prechádzke v byte zakreslili ako graf (kreslenie domčeka je priamo kreslenie grafu). Nebolo celkom triviálne pomenovať, čo je v našom prípade vrcholom a čo hranou grafu (pojmy vrchol a hrana si učiteľ zaviedol práve pri kreslení domčeka). Navyše, keď už žiaci identifikovali, že vrcholom grafu sú izby a hranami sú v podstate dvere, často urobili chybu, keď balkón do množiny vrcholov nepridali. Aj keď pri experimentovaní ním prechádzali. Na túto chybu poukázal učiteľ ľahko. Nakreslil jeden ťah v grafe, ktorý prechádzal opakovane balkónom, a potom povedal žiakom, aby tento ťah znázornili v grafe, ktorý bol pre nich modelom úlohy.

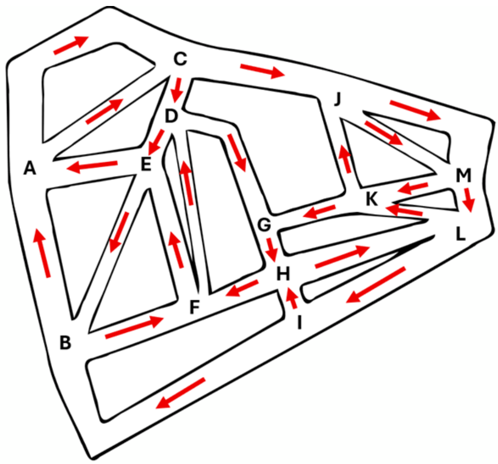
Kľúčovú myšlienku k riešeniu však nenašli žiaci v matematickom modeli (keď bola úloha zaznamenaná ako graf), ale v reálnom kontexte izieb a dverí. Tá myšlienka spočívala v tom, že ak vojdem do izby, musím z nej aj vyjsť. Čiže ak má byť úloha riešiteľná, potrebujem párny počet dverí v izbách. Učiteľ sa snažil túto myšlienku spochybniť, keď nakreslil domček s dvojicou vrcholov s nepárnym počtom hrán. Jeho úmysel žiaci odhalili prakticky okamžite, keď svoj výrok upravili. Párny počet dverí z každej izby by bol potrebný, ak by sme mali začať a skončiť v tej istej izbe. Ak táto podmienka chýba, môžu existovať práve dve izby s nepárnym počtom dverí. Potom jedna z nich bude štartovacia a druhá cieľová. Úloha bola vyriešená, pretože bolo ľahké dokázať, že v našom prípade sú až štyri zo šiestich izieb (vrátane balkóna) také, že majú nepárny počet dverí. Žiaci tak celkom správne a formálne presne pomenovali, kedy možno v grafe nájsť uzavretý (resp. otvorený) eulerovský ťah. Z hľadiska teórie grafov je dôležitou aj ďalšia podmienka pre kreslenie jedným ťahom, a tou je, že graf je súvislý. Toto sme na hodinách nezdôrazňovali, nakoľko aj žiaci vnímali súvislosť grafu ako automaticky splnený predpoklad.

Niektorí žiaci boli šikovnejší a skončili riešenie skôr. Učiteľ im preto mohol dávať rôzne doplňujúce úlohy. Minimálne koľko dverí by sme museli zamurovať, aby bola úloha riešiteľná? Alebo naopak, pomohlo by riešeniu úlohy, ak by sme nejaké nové dvere vybúrali?

Celému problému sme sa venovali približne 60 až 70 minút.

Problém 2

Na obr. 2 je schéma centra historického mestečka. Cestičky v ňom sú len úzke a ešte užšie, preto je každá z ciest len jednosmernou ulicou.



Obr. 2

1. V križovatke A sa nachádza auto kuriérskej služby. Je možné, aby cez deň prešlo celým mestom (každou uličkou) tak, aby každou uličkou prešlo práve raz?
2. Koľko z križovatiek označených písmenami A až M by mohlo byť potenciálne štartovacích, aby kuriér vedel mesto prejsť podľa podmienky v úlohe 1?
3. Pomohlo by zmeniť niektoré smery v niektorých uliciach tak, aby mohol kuriér vyjsť z ľubovoľnej križovatky a prejsť mestom podľa podmienok v úlohe 1? Ak áno, ktoré?
4. Pomohlo by teoreticky zavrieť nejaké cesty medzi križovatkami tak, aby mohol kuriér vyjsť z ľubovoľnej križovatky a prejsť mestom podľa podmienok v úlohe 1? Ak áno, koľko ich treba minimálne zavrieť?
5. Mohli by sme zavrieť niektorú križovatku a k nej prislúchajúce cesty tak, aby bola trasa kuriéra podľa podmienok v úlohe 1 uskutočniteľná aspoň z jednej zo zostávajúcich križovatiek? (Ak napríklad zavrieme križovatku A, tak aj cesty BA, EA, AC1, AC2 – tie už nepotrebujeme prechádzať).

Úloha je podobná problému č. 1. Opäť hľadáme eulerovský ťah (kreslíme jedným ťahom). Rozdiel je v tom, že nemôžeme ulicami (hranami grafu) prechádzať voľne, ale musíme použiť predpísaný smer. Ide tak o orientovaný graf. Hlavná úloha je formulovaná v prvom z piatich zadaní. Ostatné sú doplnené v snahe umožniť učiteľovi reagovať na individuálne potreby žiakov. Vzhľadom na to, že na hodinách sme úlohu zadali hneď na najbližšom stretnutí po tom, ako sme sa venovali bytu Novákovcov, niektorí žiaci podobnosti odhalili a riešenie našli rýchlejšie. Doplňujúce zadania dva až päť tak umožnili učiteľovi nechať priestor na hľadanie riešenia aj pomalším žiakom, pričom rýchlejší sa nenudili, ale venovali sa ďalším úlohám. Proces riešenia bol veľmi podobný tomu, ktorý sme predstavili pri prvom probléme. Žiaci najprv skúšali, cestovali v grafe. Na úvod opäť zdôrazníme jeden predpoklad, s ktorým sme pracovali, i keď sme ho nezdôrazňovali. Skúmaný graf je súvislý.

Úloha bola v porovnaní s predchádzajúcou jednoduchšia v tom, že žiakom sa ľahko identifikovalo, čo je vrcholom a čo hranou grafu (križovatky ako vrcholy a cesty ako hrany). Nebolo problémom nakresliť vhodnú schému. Pomerne rýchlo žiaci našli podobnosť s úlohou o byte Novákovcov, preto aj podmienku pre riešenie formulovali podobne: z každého vrcholu musí ísť párny počet ciest, resp. môžu existovať práve dve križovatky (dva vrcholy) také, že z nich ide nepárny počet ciest. V prípade orientovaného grafu toto tvrdenie nie je presné a pre učiteľa nebolo náročné ho spochybniť, t. j. nájsť taký graf, kde uvedená myšlienka neplatí. Aj tu sa ukázalo, že žiaci mali dobrú myšlienku, ktorú ale nepresne formulovali. Učiteľovi hneď vytkli, že ním nakreslený príklad má aj vrcholy, kde počet vstupných a výstupných ciest nie je rovnaký (a tieto vrcholy nie sú práve dva). Vznikla tak diskusia, kde sa učiteľ obhajoval, že podmienku o párnom počte ciest splnil, no žiaci argumentovali, že oni predsa mysleli na to, že párny znamená, že počet vstupných a výstupných ciest je rovnaký. Žiaci postupne riešili aj ďalšie úlohy. V prípade, že si nakreslili správnu schému (t. j. že nimi nakreslený graf naozaj opisoval situáciu v zadaní problému) a dobre aplikovali charakteristiku, ktorá je pre eulerovský ťah v orientovanom grafe dôležitá (že pre každý vrchol platí, že počet vstupných a výstupných ciest je rovnaký, resp. neplatí to práve pre dva vrcholy, kde pri jednom je o jednu výstupnú cestu viac a pri druhom je o jednu vstupnú cestu viac), riešenia nachádzali relatívne hladko.

Pri tejto úlohe žiaci strávili približne 50 minút času.

Tretia úloha je už akademickejšia. Žiakom sme predstavili pojem rovinného grafu, využijúc úlohu popísanú v predchádzajúcom článku. K pojmom vrchol a hrana sme doplnili aj pojem stena rovinného grafu.

Problém 3

Aký je súvis medzi počtom vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe? Vieš túto súvislosť dokázať?

Nájsť vzťah $v + s = h + 2$, pozri napr. [5], nie je po chvíľke skúšania ničím náročným. Všetci žiaci postupujú pravdepodobne rovnako. Niekoľko rovinných grafov si nakreslia, spočítajú vrcholy (v), hrany (h) a steny (s) a vzťah hľadajú. Učiteľ si všíma, aké grafy kreslia a aké súčty nachádzajú. Je možné, že sa žiak pri sčitovaní pomýli (napr. že zabudne na „vonkajšiu" stenu).

Niektorí žiaci súvislosť objavili. Ich predpoklad bol postavený na konkrétnych grafoch, ktoré nakreslili. Učiteľ ich však vyzval, aby vzťah dokázali. Na konkrétnej hodine učiteľ využil aj to, že niektorým žiakom sa jednoduchosť vzťahu zdala podozrivá a nesúhlasili s tým, že platí všeobecne. Učiteľ ich preto vyzval, aby nakreslili hocijaký rovinný graf, v ktorom vzťah neplatí. Žiaci mali aj viaceré pokusy, pri ktorých boli presvedčení, že kontrapríklad našli. Vždy sa však dostupili buď nejakej chyby pri spočítaní vrcholov, hrán alebo stien, alebo nakreslili nerovinný graf (t. j. hrany mali nejaké spoločné body aj mimo vrcholov).

Diskusia o dôkaze tvrdenia však bola dlhšia. Učiteľ argumentoval, že to, že sme nenašli rovinný graf, ktorý uvedenú rovnosť nespĺňa, ešte neznamená, že taký graf neexistuje. Niektorí žiaci v triede však prišli na zaujímavú súvislosť. Ak v rovinnom grafe pridám hranu, musí to znamenať, že pridám buď nový vrchol (a keďže nemôžem prekrížiť inú hranu, počet stien ostane rovnaký), alebo vytvorím novú stenu, ak spojím dva už existujúce vrcholy. Učiteľ ich vyzval, aby to prišli ukázať na tabuľu. Vybraní žiaci nakreslili nejaký graf, na ktorom svoju myšlienku demonštrovali. Učiteľ ich postup ocenil a opýtal sa ostatných, že čo týmto dokázali. Žiaci spoločne deklarovali, že dokázali tvrdenie pre všetky rovinné grafy. Učiteľ ich záver upravil, že to ukázali predsa len pre ten graf, ktorý nakreslili (tam ľahko dokázali, že vzťah platí, lebo vrcholy, steny a hrany spočítali) a pre každý ďalší, ktorý z neho vznikne pridaním jednej alebo viacerých hrán (čiže pre akýkoľvek „zložitejší“). Otázka teda je či tvrdenie platí aj pre všetky rovinné grafy, ktoré majú menej hrán ako žiakmi nakreslený graf. Časť žiakov sa snažila ukázať, že aj odobraním hrany sa zníži buď počet stien alebo počet vrcholov. Postup by mohol byť matematicky korektný. Našla sa však skupina žiakov, ktorí tvrdili, že sa to dá urobiť aj jednoduchšie. Povedali, že si stačí zvoliť tak jednoduchý graf, aby všetky ďalšie z neho vznikli pridávaním hrán. Posledným krokom tak bolo nakresliť najjednoduchší rovinný graf. To sa nakoniec podarilo, keď žiaci pripustili aj nulový počet hrán, čiže nakreslili jednu bodku (graf mal teda jeden vrchol a jednu stenu). Teraz už bol dôkaz ukončený.

Prirodzeným spôsobom žiaci použili princíp dôkazu matematickou indukciou. Jej prvý krok je dokázať tvrdenie pre minimálny prípustný objekt (v našom prípade najjednoduchší možný rovinný graf). Druhým je potom indukčný krok, zovšeobecnenie. Tento vzťah sa nezmení, ak pridáme jednu hranu. Matematická indukcia podľa počtu hrán. Viacerí učitelia sa svojim žiakom pokúšajú vysvetliť princíp dôkazu matematickou indukciou. Ak nie na štandardných hodinách matematiky, tak v rámci voliteľných predmetov a krúžkov. Často je však tento dôkaz pre žiakov príliš abstraktný a neprirodzený. Skúsenosť autora článku hovorí, že napr. pri dôkaze Eulerovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe je tento dôkaz vnímaný veľmi prirodzene a jeho myšlienku sú žiaci schopní nájsť relatívne samostatne.

Záver

Cieľom textu bolo priniesť ďalšie inšpirácie učiteľom matematiky základných a stredných škôl. Spolu s problémami uvedenými v predchádzajúcom článku autora získava učiteľ matematiky najmä na strednej škole zaujímavú možnosť, ako vybrané problémy teórie grafov ucelene implementovať do hodín. Pripomíname, že prezentované úlohy dávajú akýsi obsahový základ pre naplnenie hodín. Rovnako dôležitá je aj forma práce. Ak chceme, aby žiak objavoval, musí na to mať vhodný materiál (úloha), ale aj dostatok času, vhodný priestor. Je potrebné pripustiť, že pri snahe o konštruktivistický prístup vo vyučovaní sa učiteľ dostáva do situácií, ktoré si nevie natrénovať. Často musí veľmi dobre žiakov počúvať a vnímať, pružne reagovať a improvizovať. Je to náročné, no sme presvedčení, že to má v procese učenia sa veľký význam.

Literatúra

[1] *Stáňa, M.*: Objavovanie na hodinách matematiky I. Matematika–fyzika–informatika, roč. 34, č. 4 (2025), s. 252–260.

[2] *Anderson, L. W., Krathwohl, D. R.*: A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Longman, New York, 2001.

[3] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1987.

[4] *Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.

[5] *Horák, S.*: Mnohostěny. ŠMM, ÚV MO, Mladá fronta, Praha, 1970.

[6] *Matoušek, J., Nešetřil, J.*: Kapitoly z diskrétní matematiky. Karolinum, Praha, 2002.

[7] *Nelson, T., Narens, L.*: Metamemory: A theoretical framework and new findings. In: Psychology of Learning and Motivation. Vol. 26, 1999, p. 125–173 [online]. [cit. 2023-06-30] https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079742108600535?via%3Dihub.