Heronovské trojúhelníky

JAROSLAV ZHOUF

FIT ČVUT, Praha

Článek se věnuje řešení diofantovské rovnice, k níž vede úloha nalézt trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, majícími celočíselný obsah i obvod – tyto trojúhelníky nazýváme *heronovskými*.

Heronovské trojúhelníky

Pojem *heronovský trojúhelník*, jenž budeme v tomto článku užívat, se příliš často nepoužívá, spíše se nezkráceně hovoří o trojúhelníku, který má celočíselné délky stran a, b, c a celočíselný obsah. Pro výpočet jeho obsahu S využíváme *Heronův vzorec*

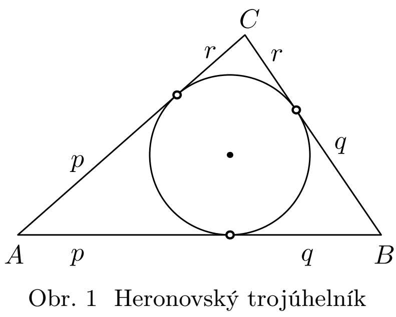
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Výchozí úloha (viz [1, s. 15, 16])

Najděte všechny trojúhelníky, které mají celočíselné délky stran a číselný poměr jejich obsahu a obvodu je dané kladné racionální číslo.

Obecné řešení dané úlohy

Jak jsme již uvedli, označíme a, b, c celočíselné délky stran trojúhelníku ABC, s jeho polovina jeho obvodu, p, q, r jsou délky úseků stran podle obr. 1 a k kladný racionální poměr celočíselných hodnot obsahu a obvodu trojúhelníku.



Obr. 1 Heronovský trojúhelník

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $p \geq q \geq r$. Z těchto nerovností plyne $2p \geq q + r$, což využijeme v dalších úvahách.

Z obr. 1 je vidět, že

$$s = p + q + r, \quad q + r = a, \quad p + r = b, \quad p + q = c, \tag{1}$$

a tedy $p = s - a$, $q = s - b$, $r = s - c$. Zadaná úloha pak přechází na řešení diofantovské rovnice s neznámými p, q, r a zadanou hodnotou k:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = k \cdot (a + b + c),$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = k^2 \cdot 4s^2,$$

$$pqr = k^2 \cdot 4(p + q + r) \tag{2}$$

Abychom rovnici (2) vyřešili, převedeme ji na tvar

$$p(qr - 4k^2) = 4k^2(q + r),$$

$$p = \frac{4k^2(q + r)}{qr - 4k^2}. \tag{3}$$

Případ $k = 1$

Případ $k = 1$ znamená, že číselně jsou obsah a obvod trojúhelníku stejné. Diofantovská rovnice (2) má v tomto případě tvar

$$pqr = 4(p + q + r).$$

Rovnost (3) převedeme s využitím odhadu $2p \geq q + r$ na nerovnost:

$$p = \frac{4 \cdot 1^2(q + r)}{qr - 4 \cdot 1^2} = \frac{4(q + r)}{qr - 4} \leq \frac{8p}{qr - 4}.$$

Díky tomu, že číslo p je kladné, odtud získáme soustavu dvou nerovnic

$$qr > 4 \text{ a } 1 \leq \frac{8}{qr - 4}, \qquad \text{tj.} \qquad qr > 4 \text{ a } qr \leq 12.$$

Platí tedy $4 < qr \leq 12$. Z těchto nerovností najdeme všechny přípustné dvojice r, q, kterých je třináct. K nim pak získáme příslušná čísla p a následně i trojice délek stran (a, b, c) trojúhelníku ABC.

Např. pro dvojici $r = 1$, $q = 5$ dostaneme po dosazení do (3)

$$p = \frac{4 \cdot (5 + 1)}{5 \cdot 1 - 4} = 24$$

a poté z (1) dopočteme hodnoty $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

Analogickým způsobem dostaneme další čtyři skupiny hledaných čísel. Těch je dohromady pět a jsou uvedeny v tab. 1. Navíc třetí a pátý trojúhelník jsou pythagorejské.

r	p	q	a	b	c
1	5	24	6	25	29
1	6	14	7	15	20
2	3	10	5	12	13
1	8	9	9	10	17
2	4	6	6	8	10

Tab. 1

Dalších osm možných skupin čísel nevyhovuje, a to ze dvou důvodů. Jeden ukazuje např. dvojice $r = 1$, $q = 7$, kdy číslo

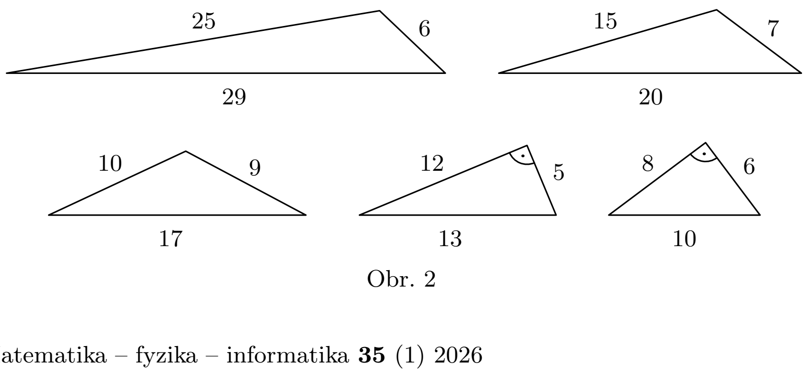
$$p = \frac{4 \cdot 8}{7 - 4} = \frac{32}{3}$$

není celé. Druhý např. dvojice $r = 1$, $q = 9$, kdy číslo

$$p = \frac{4 \cdot 10}{9 - 4} = 8$$

je menší než číslo $q = 9$.

Na obr. 2 je znázorněno všech pět heronovských trojúhelníků, které mají číselně stejné obsahy i obvody.



Obr. 2

Případ $k = 2$

Příslušné trojúhelníky, mající obsah číselně dvakrát větší než obvod, hledáme z rovnosti a nerovností

$$p = \frac{16(q+r)}{qr-16} \le \frac{32p}{qr-16},$$
$$16 < qr \le 48.$$

V tomto případě je nutno prověřit 81 skupin čísel r, q, p, a, b, c. Z nich vyhovuje osmnáct heronovských trojúhelníků s délkami stran

$$\begin{array}{lll}
(18, 289, 305), & (19, 153, 170), & (21, 85, 104), \\
(25, 51, 74), & (33, 34, 65), & (11, 90, 97), \\
(12, 50, 58), & (14, 30, 40), & (15, 26, 37), \\
(18, 20, 34), & (9, 75, 78), & (10, 35, 39), \\
(11, 25, 30), & (15, 15, 24), & (13, 14, 15), \\
(9, 40, 41), & (10, 24, 26), & (12, 16, 20).
\end{array}$$

Mezi uvedenými trojúhelníky je jeden rovnoramenný, tři poslední jsou pythagorejské – $(9, 40, 41)$, $(10, 24, 26)$ a $(12, 16, 20)$.

Případ $k = 3$

Tento případ, kdy obsah trojúhelníku je číselně třikrát větší než jeho obvod, je již numericky velmi pracný, je proto vhodné využít výpočetní techniku. Jako ukázku uveďme jednu heronovskou trojici $(a, b, c) = (15, 36, 39)$. Tato trojice je navíc pythagorejská.

Případ $k = \frac{1}{2}$

V tomto případě je obsah trojúhelníku číselně dvakrát menší než jeho obvod. Platí

$$p = \frac{q+r}{qr-1} \le \frac{2p}{qr-1},$$
$$1 < qr \le 3.$$

Zde existuje jediná trojice $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Případ $k = \frac{3}{2}$

V tomto případě, kdy je obsah trojúhelníku číselně jedenapůlkrát větší než jeho obvod, platí

$$p = \frac{9(q+r)}{qr-9} \leq \frac{18p}{qr-9},$$
$$9 < qr \leq 27.$$

Zde existuje mnoho vyhovujících trojic (a, b, c) a získat jejich úplný výčet je opět časově náročné. Na ukázku uveďme heronovskou trojici $(9, 12, 15)$, která je zároveň trojicí pythagorejskou.

Případ $k = \frac{1}{3}$

V tomto případě, kdy obsah trojúhelníku je číselně třikrát menší než jeho obvod, platí

$$p = \frac{\frac{4}{9}(r+q)}{rq-\frac{4}{9}} \leq \frac{\frac{8}{9}p}{rq-\frac{4}{9}},$$
$$\frac{4}{9} < qr \leq \frac{4}{3}.$$

Vyhovuje jedině $qr = 1$, tudíž $r = q = 1$. Odtud $p = \frac{8}{5}$. To znamená, že žádný takový heronovský trojúhelník neexistuje.

Obecná podmínka pro číselný podíl k obsahu a obvodu trojúhelníku

Jak jsme již uvedli, pro libovolné k platí

$$p = \frac{4k^2(q+r)}{qr-4k^2} \leq \frac{8k^2p}{qr-4k^2},$$
$$4k^2 < qr \leq 12k^2.$$

Jelikož pro přirozená čísla p, q platí $1 \leq qr$, je $1 \leq 12k^2$, tj.

$$k \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}28.$$

Viděli jsme, že tato nerovnost neznamená ekvivalenci s existencí heronovského trojúhelníku – jde pouze o implikaci.

Ukázka případu čísla k, které není racionální

V celém předchozím textu jsme předpokládali, že k je číslo racionální. Z předchozí kapitoly je ale zřejmé, že by analogické výpočty mohly být použity, i kdyby k bylo číslo iracionální. Na závěr si tedy jednu takovou situaci ukažme.

Jelikož se ve vzorci (3) pro výpočet čísel p, q, r vyskytuje druhá mocnina, budeme kvůli jednoduššímu výpočtu uvažovat např. $k = \sqrt{2}$. V tomto případě platí

$$p = \frac{8(q+r)}{qr-8} \leq \frac{16p}{qr-8},$$

a tedy

$$8 < qr \leq 24.$$

Úlohu řešíme stejně jako v předchozích kapitolách. Hledanými trojicemi (a, b, c) jsou $(10, 80, 89)$, $(11, 45, 54)$, $(12, 33, 43)$, $(13, 27, 38)$ i další.

Závěr

V předchozích kapitolách jsme uvedli metodu, umožňující vyhledávat heronovské trojúhelníky. Zdá se, že pokud se zvětšuje celočíselný podíl obsahu a obvodu trojúhelníku, zvětšuje se též počet heronovských trojúhelníků. Toto tvrzení však není dosud dokázáno. Stejně tak není nikde ukázáno, jak počet heronovských trojúhelníků závisí na číselné hodnotě poměru jejich obsahu a obvodu.

V článku se také mluví o pythagorejských trojúhelnících. Platí, že každý pythagorejský trojúhelník je heronovský [2, 3]. Důkaz tohoto tvrzení je snadný, proto je ponechán čtenáři. Platí však věta obrácená? Důkaz správné odpovědi je v podstatě proveden v tomto článku.

Literatura

[1] *Bradley, Ch. J.*: Challenges in Geometry for Mathematical Olympiads past and present. Oxford, University Press, 2005.

[2] *Zhouf, J.*: Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. Pedagogická fakulta UK, Praha, 2007.

[3] *Zhouf, J.*: Písemné maturitní zkoušky na gymnáziích se zaměřením na matematiku. GlobeEdit, Londýn, 2024.