MATEMATIKA

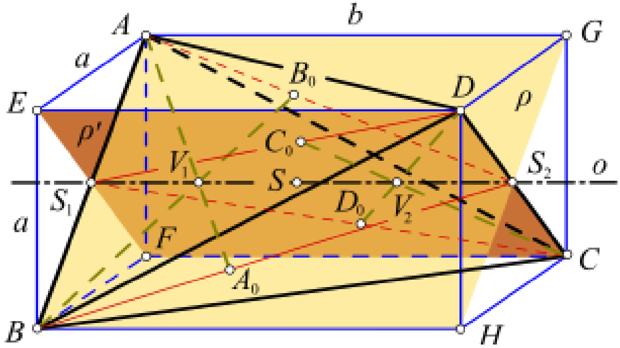
Ortocentrický čtyřstěn

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V každém trojúhelníku se výšky protínají v jediném bodě, tzv. ortocentu. U čtyřstěnů je to složitější. Například ve čtyřstěnu $ABCD$, který je vepsán do kvádru $AEBFGDHC$ s navzájem různými rozměry, se žádné dvě tělesové výšky neprotínají. (Lze se o tom přesvědčit výpočtem, viz úlohy 1 a 2 na konci článku.)

Pokud platí $|AE| = |AF| = a$ a $|AG| = b$, obr. 1, je čtyřstěn souměrný podle navzájem kolmých rovin $\varrho = ABH$, $\rho' = CDE$, a tedy i podle jejich průsečnice, osy o čtyřstěnu, na níž leží středy S_1 a S_2 čtvercových podstav $AEBF$ a $GDHC$ opsaného kvádru (úloha 3).



Obr. 1 Výšky čtyřstěnu vepsaného do kvádru se čtvercovou podstavou.

Tělesové výšky AA_0 a BB_0 jsou podle této osy souměrně sdružené. Protínají se tedy v ortocentu $V_1 \in o$ trojúhelníku ABS_2. Analogicky se výšky CC_0 a DD_0 protínají v ortocentru $V_2 \in o$ trojúhelníku CDS_1. Platí

$$|S_2V_2| = |S_1V_1| = \frac{a^2}{2b} \tag{1}$$

(úloha 4), a tak se všechny výšky čtyřstěnu protnou v jediném bodě jen tehdy, když $a = b$ (pravidelný čtyřstěn vepsaný do krychle).

V příspěvku upřesníme podmínky existence průsečíků výšek čtyřstěnu a pak se zaměříme na základní vlastnosti ortocentrického čtyřstěnu.

Definice 1

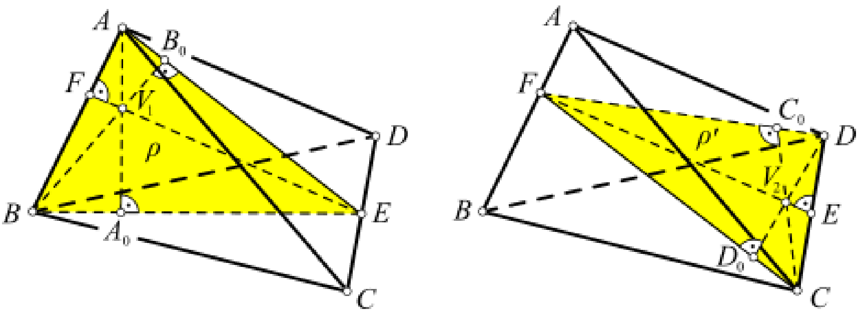
Ortocentrický čtyřstěn je čtyřstěn, v němž se všechny tělesové výšky protínají v jediném bodě, tzv. *ortocentru čtyřstěnu.* Čtyřstěn, jehož vrcholy lze označit A, B, C a D tak, aby se výšky AA_0 a BB_0 protínaly v bodě V_1 a výšky CC_0 a DD_0 v bodě $V_2 \neq V_1$, se nazývá *semiortocentrický čtyřstěn.* Má-li čtyřstěn všechny své výšky mimoběžné, nazveme jej *neortocentrivký čtyřstěn.*

Věta 1

Tělesové výšky ze dvou vrcholů čtyřstěnu se protínají, právě když je hrana těmito vrcholy určená kolmá k protilehlé hraně čtyřstěnu.

Důkaz. Nechť se výšky AA_0 a BB_0 čtyřstěnu $ABCD$ protínají v bodě V_1. Platí-li $V_1 \in \{A, B\}$, pak $AB \perp ACD$, nebo $AB \perp BCD$. Pro obě situace tedy platí $AB \perp CD$.

Je-li $V_1 \neq A$ a $V_1 \neq B$, leží výšky AA_0 a BB_0 v jednoznačně určené rovině $\rho = ABV_1$. Přímka AA_0 je kolmá ke každé přímce roviny BCD, a BB_0 ke každé přímce roviny ACD, viz obr. 2 vlevo. To však znamená, že $CD \perp AA_0$ a $CD \perp BB_0$ neboli $CD \perp \rho$. Odtud $AB \perp CD$.



Obr. 2 Průsečíky V_1 a V_2 výšek semiortocentrického čtyřstěnu.

Obráceně, platí-li $AB \perp CD$, pak existuje jediný bod $E \in CD$, pro nějž je rovina $\rho = ABE$ kolmá na přímku CD. V trojúhelníku ABE se výšky AA_0 a BB_0 protínají v jeho ortocentru V_1. Ze vztahů $AA_0 \perp BE$ a $AA_0 \perp CD$ plyne $AA_0 \perp BCD$. Analogicky platí $BB_0 \perp ACD$, a tak se přímky AA_0 a BB_0 protínají v bodě V_1 i jako tělesové výšky čtyřstěnu.

Poznámka. Také výšky z vrcholů C, D se zřejmě protínají v bodě V_2 roviny $\rho' = CDF$ kolmé na AB, obr. 2 vpravo. Úsečka $EF \in \rho \cap \rho'$ je nejkratší příčkou mimoběžek AB a CD. Za podmínky $AB \perp CD$ obsahuje oba průsečíky V_1 a V_2. Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, tak na ní leží jeho ortocentrum.

V nedávném příspěvku [2] jsme si ukázali, že protilehlé hrany čtyřstěnu jsou totožné s mimoběžnými úhlopříčkami protilehlých stěn opsaného rovnoběžnostěnu. Jsou tedy na sebe kolmé, právě když tyto dvě stěny jsou buď kosočtverce, nebo čtverce.

Má-li čtyřstěn dvě dvojice kolmých protilehlých hran, pak jsou všechny hrany opsaného rovnoběžnostěnu stejně dlouhé, a proto jsou na sebe kolmé i protilehlé hrany třetí dvojice hran čtyřstěnu. Takový rovnoběžnostěn budeme nazývat *romboedron*

Ve čtyřstěnu vepsaném do romboedronu se protínají každé dvě z jeho čtyř výšek a všechny tyto výšky mají jediný průsečík V. (Kdyby například platilo $AA_0 \cap BB_0 = V_1$ a $BB_0 \cap CC_0 = V_2 \neq V_1$, byly by přímky AA_0 a CC_0 mimoběžné, což je spor.) Poznatky shrneme do věty 2.

Věta 2

a) Čtyřstěn je ortocentrický, právě když je vepsán do romboedronu (tzn. do krychle, nebo do zkosené krychle).

b) Čtyřstěn je semiortocentrický, právě když jen dvě protilehlé stěny opsaného rovnoběžnostěnu jsou buď čtverce, nebo kosočtverce.

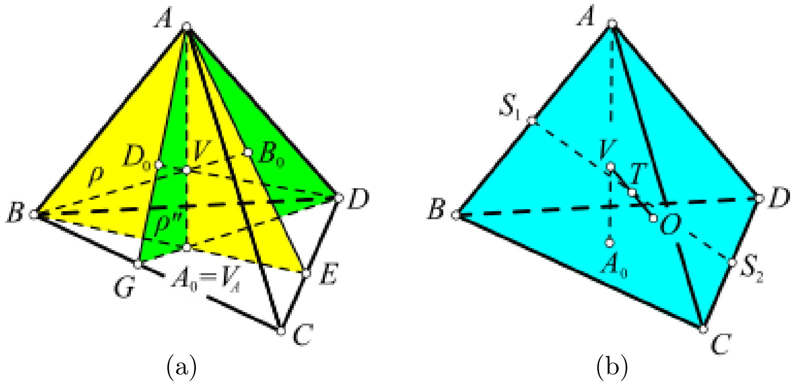
c) Všechny výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné, právě když je každá stěna opsaného rovnoběžnostěnu obdélníkem, nebo kosodélníkem.

d) Jiné možnosti vzájemné polohy výšek čtyřstěnu neexistují.

Věta 3

Na každé hraně ortocentrického čtyřstěnu se paty výšek sousedních stěn stýkají a paty jeho tělesových výšek leží v ortocentrech stěn čtyřstěnu.

Důkaz. Nechť $ABCD$ je čtyřstěn s ortocentrem $V \notin \{A, B, C, D\}$, obr. 3 (a). Z faktů $AA_0 \perp BCD$, $BB_0 \perp ACD$ a $V = AA_0 \cap BB_0$ plyne $CD \perp ABV$. Bod $E = ABV \cap CD$ je proto společnou patou stěnových výšek AE a BE.



Obr. 3 (a) K důkazu věty 3. (b) Těžiště T půlí úsečku OV.

Navíc platí $A_0 \in BE$, neboť BE je průsečnice roviny $\rho = ABV$ s rovinou BCD. Analogickou úvahou pro rovinu $\rho'' = ADV$ zjistíme, že bod A_0 leží i na výšce DG stěny BCD, a tak se nachází v jejím ortocentru V_A.

Ověření věty pro $V \in \{A, B, C, D\}$ ponechme čtenáři.

V článku [1] jsme se seznámili s Eulerovou přímkou trojúhelníku, na níž leží jeho ortocentrum, těžiště a střed opsané kružnice. Prostorová analogie tohoto poznatku plyne ze symetrie opsaného rovnoběžnostěnu (úloha 6). Je též důsledkem věty 4, kterou dokážeme pomocí vektorové algebry.

Věta 4

Je-li T těžiště čtyřstěnu $ABCD$, V jeho ortocentrum a O střed kulové plochy $\mathcal{K}$ čtyřstěnu opsané, pak platí

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \tag{2}$$

$$\overrightarrow{VO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD}), \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OV} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \tag{4}$$

Důkaz. Jsou-li S_1, S_2 po řadě středy hran AB, CD, pak T je středem úsečky S_1S_2 ([2], věta 2). Užitím známého vztahu pro polohový vektor středu úsečky obdržíme

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\Big)$$

a odtud (2). Vztah (2) zřejmě platí i tehdy, když střed O opsané sféry nahradíme libovolným jiným počátečním bodem.

K důkazu rovnosti (3) položíme $\overrightarrow{VX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD})$ a pomocí vhodných úprav ukážeme, že $X = O$. (Skalární součin $\overrightarrow{ZY} \cdot \overrightarrow{ZY}$ značíme $\overrightarrow{ZY}^2$.)

Platí

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{VX} - \overrightarrow{VA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD} - \overrightarrow{VA})$$

a odtud

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX}^2 = \frac{1}{4}\Big(&\overrightarrow{VA}^2 + \overrightarrow{VB}^2 + \overrightarrow{VC}^2 + \overrightarrow{VD}^2 + 2\overrightarrow{VB}(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA}) + \\ &+ 2\overrightarrow{VC}(\overrightarrow{VD} - \overrightarrow{VA}) + 2\overrightarrow{VD}(\overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA})\Big) = \\ &= \frac{1}{4}\Big(\overrightarrow{VA}^2 + \overrightarrow{VB}^2 + \overrightarrow{VC}^2 + \overrightarrow{VD}^2\Big).\end{aligned}$$

Ze vztahu $\overrightarrow{VB} \perp \overrightarrow{AC}$ totiž plyne

$$\overrightarrow{VB}(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA}) = \overrightarrow{VB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Stejně tak

$$\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \quad \text{a} \quad \overrightarrow{VD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Vidíme, že pravá strana rovnosti

$$|AX|^2 = \frac{1}{4}(|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2)$$

se zůstává při cyklické záměně bodů A, B, C a D stejná. To znamená, že $|AX| = |BX| = |CX| = |DX|$ neboli $X = O$.

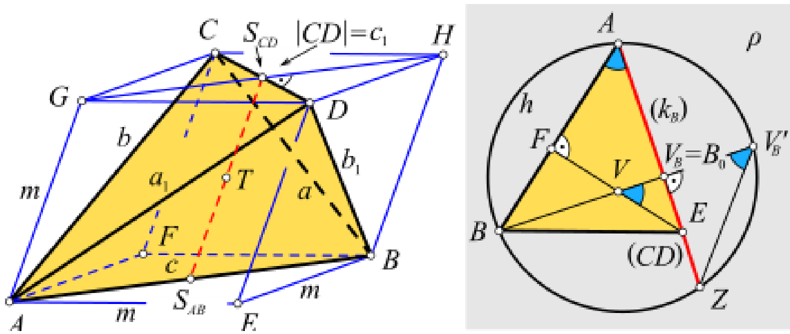
Vztah (4) plyne z (3) po přepsání do tvaru

$$-2\overrightarrow{OV} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OV}).$$

Ze vztahů (2) a (4) snadno zjistíme, že $\overrightarrow{OV} = 2\,\overrightarrow{OT}$. Platí tedy věta 5.

Věta 5 (Analogie Eulerovy přímky trojúhelníku)

Těžiště ortocentrického čtyřstěnu leží ve středu úsečky, jejímiž krajními body jsou ortocentrum čtyřstěnu a střed opsané kulové plochy.



(a) (b)

Obr. 4 (a) Ortocentrický čtyřstěn. (b) K důkazu věty 7.

Obr. 4(a) znázorňuje čtyřstěn $ABCD$ vepsaný do romboedronu, s délkou hrany m. Položme $|BC| = a$, $|AD| = a_1$, $|CA| = b$, $|BD| = b_1$, $|AB| = c$ a $|CD| = c_1$.

Těžiště T čtyřstěnu půlí jeho střední příčky (shodné s hranami čyřstěnu), a proto má od středů všech hran čtyřstěnu vzdálenost $\frac{m}{2}$. Důsledkem je následující věta.

Věta 6

Při označení podle obr. 4(a) obsahuje kulová plocha $\mathcal{K}_1(T, \frac{m}{2})$ středy stran kterékoliv stěny ortocentrického čtyřstěnu, a tak v její rovině vytíná kružnici devíti bodů nazývanou též *Feuerbachova kružnice*. Sféra $\mathcal{K}_1$ proto prochází šesti středy hran čtyřstěnu, všemi šesti patami jeho stěnových výšek a dvanácti body, které půlí úseky těchto výšek od ortocentra stěny k vrcholu. Nazývá se *první kulová plocha 12 bodů*[1)].

K odvození dalšího poznatku využijeme obr. 4 (b), jenž znázorňuje řez rovinou $\rho = ABE$ kolmou na hranu CD ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$. Kolmý průmět hrany CD do roviny ρ splývá s bodem E. Výška EF trojúhelníku ABE je nejkratší příčkou mimoběžek AB a CD, a tak se (podle poznámky za důkazem věty 1) protíná s výškou BB_0 v ortocentru V čtyřstěnu.

Položme $Z = \mathcal{K} \cap AE$ a $V'_B = \mathcal{K} \cap BB_0$. Čtyřstěnu opsaná sféra $\mathcal{K}$ protíná rovinu ACD v kružnici k_B, jejíž průmět je na obrázku totožný s úsečkou AZ obsahující výšku AE stěny ACD.

[1)] Těchto posledních 12 bodů se do názvu sféry $\mathcal{K}_1$ nezahrnuje.

Je známo, že $|V_B Z| = 2|V_B E|$ (viz např. [1], věta 1). Trojúhelníky $ZV'_B V_B$ a EVV_B jsou podobné, neboť mají úhel při vrcholu V_B pravý a kromě toho platí $|\sphericalangle V_B V'_B Z| = |\sphericalangle BV'_B Z| = |\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle V_B V E|$ (obvodové úhly a tětivový čtyřúhelník $AFVV_B$).

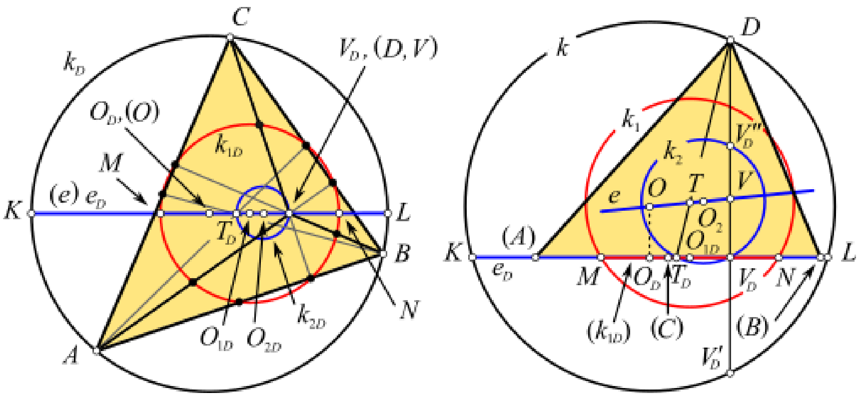
Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$|V'_B V_B| : |V_B V| = |V_B Z| : |V_B E| = 2 : 1$$

a odtud věta 7.

Věta 7

Průsečík výšky ortocentrického čtyřstěnu s opsanou sférou (různý od vrcholu čtyřstěnu) má od paty této výšky dvakrát větší vzdálenost než ortocentrum čtyřstěnu.



Obr. 5 Kolmé průměty ort. čtyřstěnu $ABCD$ do rovin ABC a ODV.

V důsledku věty 7 prochází sféra $\mathcal{K}_2 = \mathcal{H}_{V,\frac{1}{3}}(\mathcal{K})$, kde $\mathcal{H}_{V,\frac{1}{3}}$ je stejnolehlost se středem v ortocentru V a koeficientem $\frac{1}{3}$, patami výšek čtyřstěnu. Navíc dělí úseky těchto výšek od ortocentra k vrcholu čtyřstěnu v poměru 1:2. Například pro úsek DV platí $|VV''_D| : |V''_D D| = 1 : 2$, obr. 5 vpravo.

Není těžké ověřit, že též $\mathcal{H}_{T,-\frac{1}{3}}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_2$, a tak $\mathcal{K}_2$ obsahuje také těžiště stěn čtyřstěnu (důsledek věty 2 z článku [2]).

Věta 8

Ortocentra a těžiště stěn ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$ leží na kulové ploše, jež je obrazem opsané sféry ve stejnolehlosti se středem v jeho ortocentru V a koeficientem $\frac{1}{3}$. Tato *tzv. druhá kulová plocha 12 bodů* protíná úsečky VY ($Y \in \{A, B, C, D\}$) v bodech V_Y'' pro něž $|YV_Y''| : |V_Y''V| = 2 : 1$.

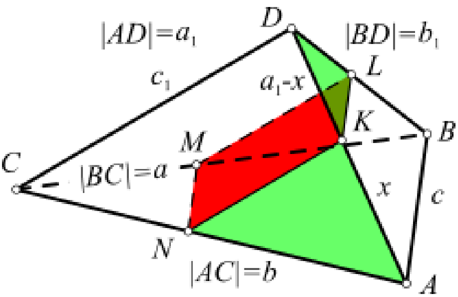
Poznatky z vět 4 až 8 názorně představuje obr. 5. Nalevo je kolmý průmět čtyřstěnu do roviny ABC. V závorkách jsou uvedeny prvky, které v průmětně neleží, ale promítají se do daného místa. Sféra $\mathcal{K}$ protíná rovinu ABC v kružnici $k_D(O_D; r_D)$, sféra $\mathcal{K}_1$ ji protíná ve Feuerbachově kružnici $k_{1D}(O_{1D}; r_{1D})$ a sféra $\mathcal{K}_2$ v kružnici $k_{2D}(O_{2D}; r_{2D})$. Středy obou kružnic, těžiště T_D a ortocetrum V_D trojúhelníku ABC leží na Eulerově přímce e_D, která je kolmým průmětem přímky $e = OV$ do roviny ABC.

Pravá část obr. 5 představuje kolmý průmět čtyřstěnu do roviny DOV, která (v daném pořadí) protíná sféry $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ v hlavních kružnicích k, k_1 a k_2. Poznamenejme ještě, že sféru $\mathcal{K}_2$ lze zavést i pro čtyřstěny, jež nejsou ortocentrické, pokud nahradíme ortocentrum čtyřstěnu jeho *Mongeovým bodem M*, průsečíkem všech šesti *Mongeových rovin*, které procházejí středy hran čtyřstěnu vždy kolmo na hranu protilehlou. Je-li čtyřstěn ortocentrický, pak $M = V$. Podrobněji s těmito a dalšími poznatky seznamuje J. Šrubař v práci [4].

Příspěvek ukončíme vyřešeným příkladem a několika doplňujícími úlohami.

Příklad

Ukažte, že řez ortocentrického čtyřstěnu rovinou, která prochází jeho vnitřním bodem rovnoběžně se dvěma protilehlými hranami, je pravoúhelník. Dále určete, pro které z takových rovin je řezem čtverec a pro které je řezem obdélník, jehož jedna strana je k-krát delší než strana sousední.



Obr. 6 Řez čtyřstěnu rovinou rovnoběžnou s hranami AB a CD.

Řešení. Bez újmy na obecnosti uvažujme řez $KLMN$ rovinou rovnoběžnou s hranami AB a CD ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$, obr. 6. Z faktů $KL \parallel AB \parallel MN$, $NK \parallel CD \parallel ML$ a $AB \perp CD$ plyne, že $KLMN$ je pravoúhelník.

Platí $\triangle AKN \sim \triangle ADC$ a $\triangle DKL \sim \triangle DAB$, a tak

$$\frac{|AK|}{|AD|} = \frac{|NK|}{|CD|} \quad \text{a} \quad \frac{|KD|}{|AD|} = \frac{|KL|}{|AB|}.$$

Odtud s využitím označení na obr. 6 vyjádříme rozměry řezu $KLMN$ jako funkce proměnné $x = |AK|$,

$$|KN| = \frac{c_1}{a_1}x \quad \text{a} \quad |KL| = c - \frac{c}{a_1}x \tag{5}$$

Z podmínky $|KN| = |KL|$ pak plyne, že

$$\text{pro } x = \frac{c}{c+c_1}a_1 \text{ je řezem čtverec o straně } \frac{cc_1}{c+c_1} \text{ cm.} \tag{6}$$

Analogicky obdržíme výsledky pro obdélníkové řezy.

Rovnost $|KL| = k \cdot |KN|$ platí, když

$$x = \frac{c}{c+kc_1}a_1, \quad |KN| = \frac{cc_1}{c+kc_1} \quad \text{a} \quad |KL| = \frac{kcc_1}{c+kc_1},$$

a rovnost $|KN| = k \cdot |KL|$ platí, když

$$x = \frac{kc}{c_1+kc}a_1, \quad |KL| = \frac{cc_1}{c_1+kc} \quad \text{a} \quad |KN| = \frac{kcc_1}{c_1+kc}.$$

Doplňující úlohy

1. Čtyřstěn $ABCD$ je vepsán do kvádru $AEBFGDHC$, v němž $|FB| = 2$, $|FA| = 3$ a $|FC| = 1$. Metodou souřadnic dokažte, že jeho výšky leží na navzájem mimoběžných přímkách.
   (Zvolte např. kartézskou soustavu souřadnic s počátkem F tak, aby $A = [0,0,3]$, $B = [2,0,0]$, $C = [0,1,0]$. Potom určete parametrická vyjádření kolmic z vrcholů čtyřstěnu k protilehlým stěnám a vyšetřete jejich vzájemnou polohu.)

2. Ve čtyřstěnu z úlohy 1 položte $|FB| = a$, $|FC| = b$ a $|FA| = c$. Pak metodou souřadnic vyšetřete vzájemnou polohu kolmic vedených z vrcholů čtyřstěnu na protilehlé stěny. Proveďte diskusi řešení vzhledem k možným hodnotám a, b, c.

3. Dokažte, že složením dvou souměrností podle navzájem kolmých rovin vznikne symetrie podle průsečnice obou rovin.

4. Pro situaci z obr. 1 dokažte, platnost vztahů $\triangle AV_1S_1 \sim \triangle S_2BS_1$ a $\triangle CV_2S_2 \sim \triangle S_1DS_2$. S jejich využitím odvoďte rovnosti (1).

5. Čtyřstěn je ortocentrický, právě když má stejně dlouhé střední příčky. Dokažte.

6. Dokažte, že trojboký jehlan má stejně dlouhé boční hrany, právě když leží pata jeho výšky ve středu kružnice opsané podstavě. Pak toto tvrzení využijte k důkazu věty 5.

   (Využijte symetrii opsaného rovnoběžnostěnu.)

7. Dokažte, že délky hran ortocentrického čtyřstěnu splňují při označení podle obr. 4 vztahy

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = 4m^2. \tag{7}$$

8. Do romboedronu $AEBFGDHC$ je vepsán čtyřstěn $ABCD$. Určete jeho výšky a délky hran, jestliže při označení podle obr. 4 platí $m = 5\sqrt{2}$ cm, $|\sphericalangle BED| = 60°$ a $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AED| = 90°$.

   (Možno řešit konstrukcí nebo výpočtem. $a = a_1 = c = c_1 = 10$ cm, $b_1 = 5\sqrt{2} \doteq 7{,}07$ cm, $b = 5\sqrt{6} \doteq 12{,}25$ cm, $v_B = v_D = 2\sqrt{10} \doteq 6{,}32$ cm, $v_A = v_C = \frac{10}{7}\sqrt{42} \doteq 9{,}26$ cm.)

9. V ortocentrickém čtyřstěnu $ABCD$ je dáno $|AB| = |AC| = 20$ cm a $|BC| = |DD_0| = 24$ cm. Určete délky ostatních hran čtyřstěnu.
   ($|AD_0| = 7$ cm, $|AD| = 25$ cm, $|BD| = |CD| = 3\sqrt{89} \doteq 28,30$ cm.)

Literatura

[1] *Leischner, P.*: O vlastnostech trojúhelníku spjatých s jeho ortocentrem, Matematika–fyzika–informatika, roč. 33 (2024), č. 4, s. 247–253.

[2] *Leischner, P.*: Trojboký jehlan nebo čtyřstěn? Matematika–fyzika–informatika, roč. 34 (2025), č. 4, s. 241–251.

[3] *Ponarin, J., P.*: Elementarnaja geometrija 2. MCNMO, Moskva 2006.

[4] *Šrubař, J.*: Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníku. Disertační práce, MFF UK, 2010. Dostupné na https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/32894?locale-attribute=cs.