

Výsledky našich soutěžících:

138. *David Hromádka*, 278,79 bodu, bronzová medaile,

155. *Erik Ježek*, 255,78 b., bronzová medaile,

196. *Svatava Šimečková*, 223,18 b., čestné uznání HM,

243. *Jan Slíva*, 167,80 bodu.

Zisk dvou bronzových medailí a jednoho čestného uznání představuje pro Českou republiku lehce podprůměrný výsledek ve srovnání s našimi výsledky z předchozích let. Slovenské družstvo dopadlo podobně jako naše, získalo dvě bronzové medaile a dvě čestná uznání. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Nemí tedy ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Nejúspěšnějšími zeměmi se čtyřmi zlatými medailemi se staly Čína, Korea a Rumunsko. Studenti z Číny obsadili dokonce první, třetí, páté a osmé místo v celkovém pořadí. Všechny podrobnosti o soutěži najdete na adrese <https://ioi2025.bo/>, jsou zde zveřejněny také soutěžní úlohy i testovací data. Kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce se statistikami <http://stats.ioinformatics.org/results/2025>.

Příští ročník Mezinárodní olympiády v informatice bude hostit v roce 2026 Uzbekistán, další IOI se pak budou konat v Německu, následně v Japonsku a v Bulharsku.

Pavel Töpfer

19. Středoevropská matematická olympiáda



Saská Kamenice neboli Chemnitz hostila 25. až 31. srpna v pořadí 19. ročník Středoevropské matematické olympiády. Kromě deseti stálých účastníků, tedy šestičlenných týmů z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska, se letošní soutěže zúčastnilo také družstvo z Ukrajiny jakožto hostující země.

Český tým tvořili Martin Bryja (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 6/8), Alexis Théodore Dachary (Letohradské soukromé G, 7/8), Lukáš Komín (G Opatov, Praha 4, 6/8), Helena Muchová (G Jana Keplera, Praha 6, 7/8), Svatava Šimečková (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 7/8) a Petr Vokřínek (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 5/8), vedoucími výpravy byli Matěj Doležal a Magdaléna Mišinová.

V individuální soutěži řešilo 66 soutěžících během pěti hodin čtyři úlohy. Za každou úlohu bylo možné získat až osm bodů. Na stříbrnou medaili dosáhli Martin Bryja a Alexis Théodore Dachary, na bronzovou pak Petr Vokřínek a Svatava Šimečková. Mimo to

Helena Muchová získala čestné uznání (HM), jež se uděluje za úplné vyřešení alespoň jedné z úloh. Na dokonalé skóre 32 bodů letos dosáhlo sedm soutěžících: po dvou z Německa a Ukrajiny a tři z Polska. Bodové hranice pro získ jednotlivých medailí byly letos nastaveny poměrně vysoko: 31 na zlatou medaili, 24 na stříbrnou a 18 na bronzovou.

Výsledky českého týmu (v závorce body za jednotlivé úlohy): 14.–18. Martin Bryja (7, 8, 2, 7) a Alexis Théodore Dachary (6, 8, 2, 8), 24 bodů, oba stříbrná medaile, 25.–30. Petr Vokřínek (3, 8, 0, 8), 19 b., bronzová medaile, 31.–36. Svatava Šimečková (8, 8, 0, 2), 18 b., bronzová medaile, 37.–38. Lukáš Komín (7, 5, 2, 3), 17 b., 47.–51. Helena Muchová (2, 8, 2, 1), 13 b., HM.



Český tým

V soutěži družstev nasbíral český tým z osmi zadaných úloh celkem 42 bodů, čímž se umístil na sdíleném 3. až 4. místě spolu s Polskem. V takové situaci pravidla soutěže upřednostňují tým s vyšším počtem úplně vyřešených úloh, díky čemuž získalo bronzové medaile právě české družstvo. Poznamenejme, že letošní týmová soutěž byla

obzvláště úspěšná i pro slovenský tým, který získal zlatou medaili a se ziskem 46 bodů zaostal pouze za hostující Ukrajinou s 54 body.

Mezi soutěžními úlohami se letos objevily i dvě české, a to první a třetí v týmové soutěži od Josefa Minaříka a od Michala Janíka a Josefa Tkadlece.

Dále přikládáme zadání soutěžních úloh. Poznamenejme ještě, že úlohy jsou řazeny podle témat (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel), nikoli podle obtížnosti. V týmové soutěži jsou dvě úlohy od každého tématu, přičemž první je vždy lehčí.

Individuální soutěž

Úloha 1 Necht $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takovou, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokažte, že existuje kladné celé číslo n_0 takové, že pro všechna kladná celá čísla $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ platí $f^n(x) \geq x$.

Poznámka. Výraz f^n zde značí funkci f aplikovanou n -krát, tedy

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\text{-krát}}.$$

Úloha 2 Předpokládejme, že máme nekonečnou čtvercovou tabulku, v níž jsou některá políčka obarvena červeně. Potom je *rubínová věž* figurka, která se v jednom tahu může pohnout o libovolný počet políček v jednom ze směrů rovnoběžných se stranami políček tabulky (buď svisle, nebo vodorovně),

přičemž musí po celý tah zůstat na červených políčkách.

Andulka začíná s neobarvenou nekonečnou čtvercovou tabulkou. Poté provede následující: Nejprve obarví nanejvýš 2025 políček červeně. Potom umístí několik rubínových věží na po dvou různá červená políčka tak, aby byla splněna následující dvě pravidla:

- Žádná rubínová věž se nemůže dostat jedním tahem na políčko, kde stojí jiná rubínová věž.
- Každá rubínová věž se může dvěma tahy dostat na libovolné políčko, kde stojí jiná rubínová věž.

Najděte největší možný počet rubínových věží, který může Andulka tímto způsobem umístit.

Úloha 3 Buď ABC trojúhelník. Jeho kružnice vepsaná ω se dotýká stran BC , CA a AB postupně v bodech D , E a F . Necht' P a Q jsou body na příince BC různé od D takové, že $|PB| = |BD|$ a $|QC| = |CD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům PCE a QBF a kružnice ω prochází společným bodem.

Úloha 4 Necht' $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel. Množinu $S \subseteq \mathbb{Z}$ nazveme *saskou*, je-li $ab + c$ pro libovolná tři po dvou různá $a, b, c \in S$ čtvercem celého čísla. Dokažte, že každá saská množina je konečná. Dále určete největší možný počet prvků saské množiny.

Týmová soutěž

Úloha 1 Budulínek má n mincí s celočíselnými hodnotami $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0$. Stojí před automatem, který

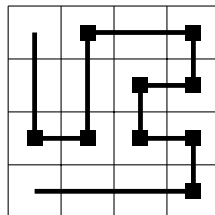
nabízí n tyčinek s kladnými celočíselnými cenami $b_1, b_2, \dots, b_n$. Budulínek si všiml, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i$. Dále platí, že celková hodnota Budulínekových mincí je stejná jako součet cen všech tyčinek. Tyčinky lze kupovat v libovolném pořadí. Aby si Budulínek koupil i -tou tyčinku, musí do automatu naházet mince o celkové hodnotě alespoň b_i . Pokud však zaplatí více, automat mu žádné peníze nevrátí. Dokažte, že Budulínek si může koupit alespoň polovinu tyčinek.

Úloha 2 Necht' $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

a že existuje nanejvýš jedno číslo $a \in \mathbb{R}^+$, pro něž $f(a) = 1$.

Úloha 3 Had v tabulce $n \times n$ je cesta, která se sestává z úseček mezi středy sousedních políček, prochází středy všech políček a navštíví každé políčko právě jednou. Dvě políčka jsou zde považována za sousední, pokud sdílejí hranu. Všimněme si, že všechny úsečky tvořící hada jsou rovnoběžné s některou ze stran políček v tabulce. Na obrázku je příklad hada v tabulce 4×4 .



Tento had má devět pravoúhlých zatáček, které jsou vyznačené malými černými čtverečky.

Uvažme hada skrze 2025 políček tabulky 45×45 . Kolik nejvíce pravoúhlých zatáček může takový had mít?

Úloha 4 Nechť n je kladné celé číslo. V provincii Tramtárie leží $100n$ měst, každá dvě jsou spojena přímkou cestou a každá z těchto cest má mýtnou bránu vybírající nějaké kladné mýto. Mýto z každé brány se rozděluje rovnoměrně mezi města na konci příslušné cesty (to znamená, že každé z oněch dvou měst dostane polovinu příjmu). Celkový mýtní příjem každého města je součet příjmů, které dostává ze $100n - 1$ mýtných bran na svých cestách.

Nový zákon nařizuje, aby mýto z některých bran vybírala spolková vláda namísto měst na koncích příslušné cesty. Guvernér Tramtárie rozhoduje o tom, které brány to budou. Starostové měst vyžadují, aby součet příjmů ze zbývajících bran každému městu dával alespoň 99 % jeho původního příjmu.

V závislosti na n najděte největší kladné celé číslo k takové, že guvernér může vždy vybrat k mýtných bran, z nichž bude příjmy dostávat spolková vláda, a zároveň vyhovět požadavku starostů.

Úloha 5 Je dán trojúhelník ABC takový, že $|AB| < |AC|$. Označme jako D patu výšky z A na BC . Nechť E je bod takový, že $ABEC$ je rovnoběžník. Ať M je bod uvnitř trojúhelníku ABC splňující $|MB| = |MC|$. Nechť

F je obraz bodu D v osové souměrnosti podle tečny kružnice opsané trojúhelníku ADM v bodě M . Dokažte, že $|AF| = |DE|$.

Úloha 6 Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s vnitřním bodem D splňujícím $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$. Přímky BD a AC se protínají v bodě E , obdobně se přímky CD a AB protínají v bodě F . Body $P \neq E$ a $Q \neq F$ leží na přímce EF tak, že platí $|BP| = |BE|$ a $|CQ| = |CF|$. Předpokládejme, že úsečky AP a AQ protínají kružnici ω opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $R \neq A$ a $S \neq A$. Dokažte, že přímký RF a SE se protínají na kružnici ω .

Úloha 7 Buď n kladné celé číslo takové, že *součet* kladných dělitelů $n^2 + n + 1$ je dělitelný třemi. Dokažte, že lze rozdělit kladné dělitele $n^2 + n + 1$ do tří množin takových, že *součin* všech prvků v každé množině je stejný.

Úloha 8 Rozhodněte, zda následující tvrzení platí pro libovolný polynom P stupně alespoň 2 s nezápornými celočíselnými koeficienty: Existuje kladné celé číslo m takové, že pro nekonečně mnoho kladných celých čísel n má číslo $P^n(m)$ více než n různých kladných dělitelů.

Poznámka. Výraz P^n značí P aplikované n -krát,

$$P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x)\dots))}_{n\text{-krát}}.$$

Magdaléna Mišinová