

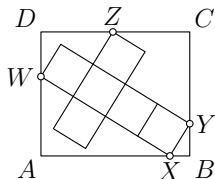
Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 3. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Naše rubrika za poslední dva roky zveřejnila zadání 16 úloh od 9 autorů, obdržela 215 správných nebo částečných řešení od 75 různých řešitelů. Nejvíce (14) řešení jsme obdrželi od *Karola Gajdoše* z Trnavy, dále 9 řešení od *Piotra Szatana* z II LO im. Stanisława Staszica v Tarnowskich Górach (Polsko), který patří do početné skupiny žáků této střední školy, která nám pravidelně posílá svá řešení úloh.

Úloha 305

Do obdélníku $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 30$, $|BC| = 25$ jsme umístili síť krychle, která se dotýká jeho stran v bodech X, Y, Z a W podle obrázku. Vypočítejte délku strany krychle a rozhodněte, zda lze tuto síť umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku.



Tomáš Bárta

Úloha 306

U kulatého stolu sedí n ($n \geq 3$) svatebních hostů. Číšník přinesl kulatý táč, na němž je n různých zákusků rozmístěných do kruhu. Ukázalo se, že každý host je alergický právě na jeden zákusek, každý na jiný. Najděte všechna n s následující vlastností:

Jsou-li zákusky na tácu rozmístěny do kruhu jakkoliv, číšník může položit táč doprostřed stolu tak, aby před každým hostem byl na tácu zákusek, na nějž není alergický.

Josef Tkadlec

V následující části uvádíme řešení úloh 301 a 302, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (34.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 301

Určete všechny možné hodnoty zlomku

$$\frac{x + 33y}{33x + y}$$

pro nezáporná reálná čísla x, y , která nejsou současně rovna nule?

Ján Mazák

Řešení. Vzhledem k tomu, že x a y jsou nezáporná reálná čísla, platí

$$\frac{x + 33y}{33x + y} = \frac{x + 33(33x + y) - 33^2x}{33x + y} = 33 - \frac{(33^2 - 1)x}{33x + y} \leq 33.$$

Díky symetrii vzhledem k proměnným x a y také platí

$$\frac{y + 33x}{33y + x} \leq 33, \quad \text{tedy ekvivalentně} \quad \frac{1}{33} \leq \frac{x + 33y}{33x + y}.$$

Hodnoty zlomku jsou tak z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$. Hodnotu 33 tento zlomek nabývá pro $x = 0$. Pro libovolné reálné číslo a z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$ a libovolné kladné reálné číslo x je číslo

$$y = x \frac{33a - 1}{33 - a}$$

zřejmě nezáporné, dosazením do výše uvedeného zlomku dostaneme, že jeho hodnota je rovna

$$\frac{x + 33 \frac{33a - 1}{33 - a} x}{33x + \frac{33a - 1}{33 - a} x} = \frac{33 - a + 33^2 a - 33}{33^2 - 33a + 33a - 1} = a.$$

Uvedený zlomek tak nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Miriám Barešová*, *G Dobruška*, *Martin Bryja* a *Alexander Košťál*, oba G Brno, *tř. Kpt. Jaroše*, *Bartosz Depta*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman* a *Bartosz Wieczorek*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Lukáš Chalupník*, SPŠE a G Praha 10, *V Úžlabíně*, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Petr Karlík*, G Praha 10, *Voděradská*, *Lukáš Komín*, G Praha 4, *Opatov*, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, *Korunní*, *Helena Muchová*, GJK Praha 6, *Ondřej Nevěřil*, G Zábřeh, *Lucian Poljak*, GJŠ Přerov, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec, *Štěpán Sikora*, G Praha 7, *Nad Štolou*, *Petr Starý*, G České Budějovice, *Jírovcova* a *Eva Martikánová*, MG Opava,

Úloha 302

Na počátku stálo zboží ve dvou prodejnách stejnou částku A . Několikrát si tyto dvě prodejny konkurovaly následujícím způsobem. Pokud jedna prodejna změnila cenu zboží o p procent, $p \in \mathbb{Z}$, $0 < |p| < 100$, druhá prodejna vzápětí cenu změnila o stejný počet procent opačným směrem (např. pokud jedna prodejna cenu zvýšila o 3 %, druhá ji o 3 % snížila a naopak). Po k takových změnách se ukázalo, že zboží v obou prodejnách stojí opět stejně. Určete nejvyšší možnou výslednou cenu toho zboží. Úlohu řešte pro a) $k = 4$, b) $k = 3$.

Jaroslav Zhouf, Pavel Calábek

Řešení.

a) Označme p_i pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jednotlivé procentní změny cen zboží v prvním obchodě. Po těchto změnách má zboží cenu

$$N = A \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \left(1 + \frac{p_4}{100}\right).$$

Zboží ve druhém obchodě stojí stejnou částku, která je nyní rovna

$$N = A \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) \left(1 - \frac{p_2}{100}\right) \left(1 - \frac{p_3}{100}\right) \left(1 - \frac{p_4}{100}\right).$$

Vynásobením předchozích rovnic dostaneme

$$N^2 = A^2 \left(1 - \frac{p_1^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_2^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_3^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_4^2}{100^2}\right).$$

Jelikož $p_i^2 < 100^2$, vidíme, že cena zboží se jistě zmenší, jeho největší možná hodnota nastane pro $p_i^2 = 1$ a bude

$$N \leq A \sqrt{\left(1 - \frac{1}{100^2}\right)^4} = A \left(\frac{100^2 - 1^2}{100^2}\right)^2 = A \left(\frac{99 \cdot 101}{100^2}\right)^2 \doteq 0,9998A.$$

Tato hodnota je dosažitelná, stačí aby v každém obchodě dvakrát zvýšili cenu o 1 % a dvakrát ji o toto 1 % snížili, tj. např. pro $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p_4 = -1$.

Nejvyšší možná cena zboží po čtyřech změnách je uvedena výše a je přibližně o 0,02 % menší než cena původní.

b) Podobnými úvahami jako v předchozím řešení zjistíme, že cena zboží se opět sníží. Ovšem nyní již neexistuje žádné pořadí změn ceny o 1 %

takové, aby po třech opačných změnách byla v obou obchodech stejná cena. Hledáme tedy taková celá čísla p_1, p_2, p_3 , pro která podle zadání platí $0 < |p_i| < 100$ a současně je konečná cena v obou obchodech stejná, tj. platí

$$\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) \left(1 - \frac{p_2}{100}\right) \left(1 - \frac{p_3}{100}\right),$$

neboli $(100 + p_1)(100 + p_2)(100 + p_3) = (100 - p_1)(100 - p_2)(100 - p_3)$.
Úpravou této rovnice dostaneme

$$100^2(p_1 + p_2 + p_3) + p_1p_2p_3 = 0. \quad (1)$$

Jelikož 5^4 dělí první sčítanec, musí dělit i druhý, tedy součin $p_1p_2p_3$. Podle zadání platí $|p_i| < 100$, tedy každé z čísel p_i je dělitelné nejvýše druhou mocninou prvočísla 5.

Nejprve nechť dvě z čísel p_i jsou dělitelná 25, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p_1 = 25k_1$ a $p_2 = 25k_2$, kde $k_i \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Dosazením do rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$p_3 = -\frac{400(k_1 + k_2)}{k_1k_2 + 16}.$$

Podle zadání je $p_3 \neq 0$, tedy $k_1 \neq -k_2$. Součet $k_1 + k_2$ je celé číslo mezi -6 a 6 , jmenovatel $k_1k_2 + 16$ uvedeného zlomku může nabývat hodnot $\{10, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22, 25\}$ – vyloučili jsme hodnoty $16 - 9 = 5$, $16 - 4 = 12$ a $16 - 1 = 15$, které nastanou jen v případě $k_1 = -k_2$. Vidíme, že jmenovatelé 13, 14, 17, 19, 22 jsou dělitelné velkými prvočísly, která jsou nesoudělná s čitatelem, číslo p_3 tak jistě nebude celé. Zbývající hodnoty jmenovatelů rozebereme jednotlivě.

- Pokud je jmenovatel 10, potom $\{k_1, k_2\} \in \{\{-2; 3\}, \{2; -3\}\}$. V tomto případě je $p_3 = \pm 40$. Rovnice (1) tak má řešení

$$(-50; 75; -40), \quad (75; -50; 40), \quad (50; -75; 40), \quad (-75; 50; 40).$$

Vidíme, že první a třetí řešení jsou vzájemné reakce prvního a druhého obchodu, podobně druhé a čtvrté řešení. První a druhé resp. třetí a čtvrté řešení se liší jen pořadím změn. Ve všech případech tak bude výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 - \frac{50}{100}\right) \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 - \frac{40}{100}\right) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{40}A.$$

- Jmenovatele 18 dostaneme v případě $\{k_1, k_2\} \in \{\{2; 1\}, \{-2; -1\}\}$, potom ovšem $p_3 = \pm 200/3$ není celé číslo.
- Jmenovatele 20 dostaneme v případě $\{k_1, k_2\} \in \{\{2; 2\}, \{-2; -2\}\}$. V tomto případě je $p_3 = \pm 80$ a rovnice (1) má řešení

$$(50; 50; -80), \quad (-50; -50; 80),$$

která jsou vzájemnou reakcí obchodů na sebe. V tomto případě je výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 + \frac{50}{100}\right) \left(1 + \frac{50}{100}\right) \left(1 - \frac{80}{100}\right) = A \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20}A.$$

- Konečně, když jmenovatel je 25, platí $\{k_1, k_2\} \in \{\{3; 3\}, \{-3; -3\}\}$. Potom $p_3 = \pm 96$ a rovnice (1) má řešení

$$(75; 75; -96), \quad (-75; -75; 96),$$

která jsou vzájemnou reakcí obchodů na sebe. V tomto případě je výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 - \frac{96}{100}\right) = A \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{49}{400}A.$$

Získali jsme tři možná řešení, z nichž největší možné je $N = \frac{21}{40}A$.

Nyní rozebereme případ, kdy jedno z čísel p_i je dělitelné 5^2 a zbývající dvě jsou dělitelná 5. Bez újmy na obecnosti $p_1 = 25k_1$, $p_2 = 5k_2$, $p_3 = 5k_3$, kde $k_1 \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $k_2, k_3 \in \{-24, -23, \dots, 24\}$. Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$100^2(25k_1 + 5k_2 + 5k_3) + 5^4 k_1 k_2 k_3 = 0,$$

což po úpravě dává

$$5 \cdot 16(5k_1 + k_2 + k_3) + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

odkud vidíme, že jedno z čísel k_2, k_3 musí být dělitelné 5. Tuto situaci jsme však již řešili výše.

Nejvyšší možná dosažitelná cena tak v případě $k = 3$ je $N = \frac{21}{40}A$. Ta nastane, pokud jeden z obchodů bude ceny měnit v nějakém pořadí o 75, -50 a 40 procent, resp. o čísla k nim opačná.

Neúplná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, *Korunní* a *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko)

Pavel Calábek