

Slovní úlohy na využití absolutních hodnot

JAKUB NOVÁK

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Učitel matematiky může ve výuce zvýšit motivaci žáků vhodně zvolenou slovní úlohou. Ta ilustruje využití matematického aparátu mimo matematiku; především ale jejím řešením aktivně rozvíjí žáci své kompetence a schopnosti matematizace, tj. abstrakce, zjednodušení a převedení zadaného problému na matematickou úlohu. V učebnicích a ve výuce se tak můžeme setkat třeba se slovními úlohami vedoucími na řešení soustav lineárních rovnic, výpočet povrchu či objemu tělesa nebo aplikaci trigonometrických vět.

V dotazníkovém šetření, které autor článku provedl mezi učiteli na českých gymnáziích, mělo 127 respondentů u každého z 18 tematických okruhů středoškolské matematiky¹⁾ uvést počet obvykle zadávaných úloh v hodinách matematiky, jejichž zadání odkazuje na situaci nebo jevy mimo školskou matematiku. Největší podíl respondentů, kteří uvedli odpověď „0“, měl okruh *Funkce, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou*, a to přibližně 49 %. Tato skutečnost je v souladu s tím, že se v kapitolách o absolutní hodnotě v běžně užívaných učebnicích (jmenovitě učebnici [2] nakladatelství Prometheus nebo učebnici [3] a pracovním sešitu [4] řady Didaktis) takové úlohy nevyskytují vůbec. Nevyskytují se rovněž ani ve specializované sbírce aplikačních úloh [5].

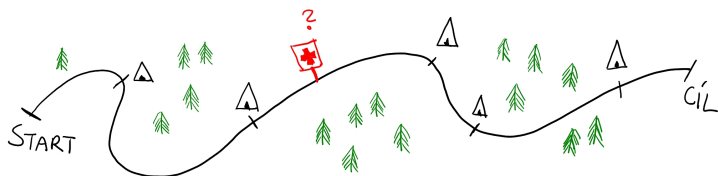
V tomto článku proto představíme dvě slovní úlohy, které vyřešíme užitím funkcí s absolutními hodnotami. Konkrétně budeme využívat geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu $|a - b|$ jako vzdálenosti obrazů reálných čísel a a b na číselné ose.

Úloha 1 (Zdravotnické stanoviště na běžeckém závode)

Na běžecké trase dlouhé d km se nachází n různých kontrolních stanovišť, ne nutně rovnoměrně rozmístěných. Kromě nich je třeba na trať

¹⁾ Při sestavování okruhů autor vycházel z platného RVP pro gymnázia [1], např. byly vymezeny okruhy *Kvadratické funkce, rovnice a nerovnice*, *Stereometrie* nebo *Pravděpodobnost*.

umístit také jedno zdravotnické stanoviště. Z něho by zdravotníci měli být schopni se co možná nejrychleji dostat ke startu, cíli i všem kontrolním stanovištím. Kam máme zdravotnické stanoviště umístit, aby součet jeho vzdáleností od všech kontrolních stanovišť, od startu a od cíle byl co nejmenší? Předpokládejme, že závod končí jinde než začal a že neexistuje kratší cesta mezi stanovišti než po závodní trase.



Poznámka: Z ohledem na rozsah tohoto článku formulujeme úlohu rovnou obecně, žákům je však možné úlohu nejprve formulovat pro konkrétní údaje. Např.:

- délka trasy je 45 km, tři stanoviště jsou na 13., 26. a 37. kilometru;
- stejná délka trasy, ale stanoviště jsou čtyři, a to na 17., 30. a 35. a 40. kilometru.

Řešení obou variant bude patrné z obecného postupu, který nyní popíšeme.

Řešení. Nechť se zdravotnické stanoviště nachází na x -tém kilometru trasy dlouhé d km a kontrolní stanoviště se nachází postupně na x_1 -tém, x_2 -tém, $\dots$, x_n -tém kilometru trasy, kde $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$. Vzdálenost zdravotnického stanoviště od startu je pak rovna x , vzdálenost od cíle je rovna $(d - x)$ a vzdálenost od k -tého stanoviště je dle geometrického významu absolutní hodnoty rovna $|x - x_k|$.

Funkce f , jejíž minimum nyní budeme na intervalu $\langle 0; d \rangle$ hledat, má proto předpis tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + (d - x) = \\ &= |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + d. \end{aligned}$$

Vyjádříme předpis funkce f v jednotlivých intervalech $\langle 0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, $\dots$, $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; d \rangle$ tak, aby neobsahoval žádné absolutní hodnoty. To provedeme dobře známým odstraňováním znaků absolutních hodnot v závislosti na znaménku zastoupeného dvojčlenu. Postup je podrobněji popsán např. v řešeném příkladu 3 učebnice [2, str. 45].

Ve sloupcích tabulky 1 jsou pro každý interval vyjádřeny dvojčleny, kterými nahradíme výrazy s absolutními hodnotami v předpisu funkce f . V posledním řádku je pak uveden předpis lineární funkce, která je na daném intervalu identická s funkcí f ; $k_0, \dots, k_n$ jsou přitom jisté reálné konstanty.²⁾ Všechny tyto lineární funkce označme postupně $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ a f_n .

	$x \in \langle 0; x_1 \rangle$	$x \in \langle x_1; x_2 \rangle$	$x \in \langle x_2; x_3 \rangle$	$\dots$	$x \in \langle x_{n-1}; x_n \rangle$	$x \in \langle x_n; d \rangle$
$ x - x_1 $	$x_1 - x$	$x - x_1$	$x - x_1$	$\dots$	$x - x_1$	$x - x_1$
$ x - x_2 $	$x_2 - x$	$x_2 - x$	$x - x_2$	$\dots$	$x - x_2$	$x - x_2$
$ x - x_3 $	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$\dots$	$x - x_3$	$x - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$ x - x_{n-1} $	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$\dots$	$x - x_{n-1}$	$x - x_{n-1}$
$ x - x_n $	$x_n - x$	$x_n - x$	$x_n - x$	$\dots$	$x_n - x$	$x - x_n$
$f(x)$	$-nx + k_0$	$-(n-2)x + k_1$	$-(n-4)x + k_2$	$\dots$	$(n-2)x + k_{n-1}$	$nx + k_n$

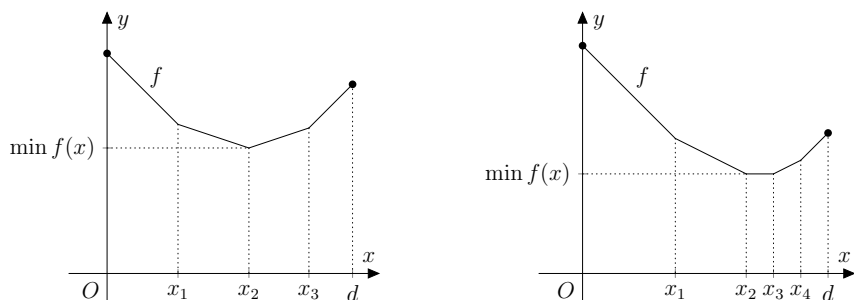
Tabulka 1: Výrazy v absolutních hodnotách a vyjádření funkce f v dílčích intervalech

Podívejme se nyní na směrnice grafů určených lineárními funkcemi; všimněme si přitom, že se v řadě zvětšují o 2. Pro lichá n to znamená, že žádná z těchto směrnic není nulová. Označíme-li tehdy $m = \frac{n+1}{2}$, mají grafy funkcí $f_0, \dots, f_{m-1}$ zápornou směrnici a grafy funkcí $f_m, \dots, f_n$ kladnou směrnici. To znamená, že pro lichá n je celá funkce f na intervalu $\langle 0; x_m \rangle$ klesající a na intervalu $\langle x_m; d \rangle$ zase rostoucí.³⁾ Odtud dostáváme, že v bodě x_m musí být minimum funkce f , a proto musí být pro lichá n zdravotnické stanoviště na $(\frac{n+1}{2})$ -tém stanovišti. Příklad grafu funkce f pro $n = 3$ je na obr. 1 vlevo.

Pro sudá n je jedna ze zkoumaných směrnic nulová, a to směrnice grafu lineární funkce f_p , kde $p = \frac{n}{2}$. Na intervalu $\langle 0; x_p \rangle$ je tak celá funkce f klesající, na intervalu $\langle x_p; x_{p+1} \rangle$ konstantní a na intervalu $\langle x_{p+1}; d \rangle$ rostoucí. Minimální hodnoty tak nabývá funkce f v libovolném bodu intervalu $\langle x_p; x_{p+1} \rangle$. Pro sudá n proto můžeme zdravotnické stanoviště postavit kdekoli mezi $\frac{n}{2}$ -tým a $(\frac{n+2}{2})$ -tým stanovištěm. Příklad grafu funkce f pro $n = 4$ je na obr. 1 vpravo.

²⁾Hodnoty všech konstant k_i se dají přesně vyjádřit součty nebo rozdíly parametrů $x_1, \dots, x_n$ a d , pro další řešení úlohy je však nepotřebujeme.

³⁾Správně bychom zde ještě měli poznamenat, že je funkce f vzhledem ke svému předpisu spojitá.



Obr. 1 Příklady grafů funkce f pro $n = 3$ a $n = 4$

Na závěr poznamenejme, že pokud bychom žákům zadali zjednodušené verze úlohy s pevně zvolenými parametry, jak jsme je navrhli v poznámce před řešením, muselo by být zdravotnické stanoviště na 26., resp. kdekoli mezi 30. a 35. kilometrem trati.

Úloha 2 (Modely výkonnosti IT oddělení)

Vedoucí IT úseku, který se zabývá řešením problémů jedné nejmenované korporátní firmy, chce mít k dispozici model výkonnosti svého oddělení. Žádaný model má v závislosti na počtu problémů předpovědět přibližnou dobu jejich vyřešení.⁴⁾ Vedoucí si pro sebe provedl čtyři měření: při prvním zvládl tým vyřešit 7 problémů za 9 minut, při druhém 10 problémů za 10 minut, při třetím 15 problémů za 19 minut a při čtvrtém 4 problémy za 5 minut.

- a) Který druh funkce z následujícího seznamu bude nejlépe modelovat popsanou závislost (x značí počet problémů, y potřebný čas v minutách)?

- i) konstantní funkce $f: y = b; b \in \mathbb{R}$;
- ii) přímá úměrnost $f: y = ax; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iii) obecná lineární funkce $f: y = ax + b; a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iv) nepřímá úměrnost $f: y = \frac{a}{x}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- b) Najděte konkrétní předpis funkce, který byste předložili jako ideální model vedoucímu IT oddělení.

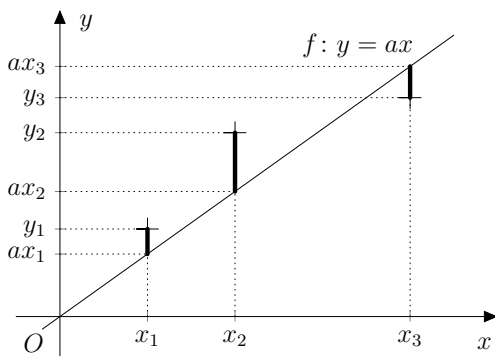
⁴⁾Předpokládáme přitom, že všechny problémy mají srovnatelnou obtížnost.

Řešení. S rostoucím počtem problémů roste také doba potřebná k jejich řešení, proto vhodným modelem nebude konstantní funkce ani nepřímá úměrnost. Protože navíc vyřešit 0 problémů zřejmě týmu nezabere žádný čas, vhodné modely budeme hledat pouze mezi funkcemi, které jsou přímými úměrnostmi. Žádná z nich však nebude jednoznačně „ideálním modelem“; body $[0; 0]$, $[7; 9]$, $[10; 10]$, $[15; 19]$ a $[4; 5]$ totiž neleží na přímce. Popíšeme několik modelů, které je možné žákům ukázat nebo na které mohou žáci sami přijít.

Patrně nejjednodušší model získáme následující úvahou: tým celkově vyřešil 36 problémů za 43 minut, tedy jeden problém vyřešil průměrně za $\frac{43}{36}$ min $\doteq 1,19$ minut. Hledaná přímá úměrnost proto bude mít předpis ve tvaru

$$f_1: y = \frac{43}{36}x.$$

Druhý model už bude využívat absolutních hodnot. Nazvěme jeho určení metodou nejkratších úseček a ilustrujme ji na příkladu se třemi zadanými body $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ a $[x_3; y_3]$ (viz obr. 2).



Obr. 2 Metoda nejkratších úseček

Naším úkolem je najít funkci $f: y = ax$ takovou, že tři zvýrazněné úsečky, které reprezentují rozdíly mezi „ideálními“ a „skutečnými“ body, budou v součtu co nejkratší. Matematicky proto minimalizujeme výraz s proměnnou a , který má vyjádření

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + |f(x_3) - y_3| = \\ &= |ax_1 - y_1| + |ax_2 - y_2| + |ax_3 - y_3|. \end{aligned}$$

Nyní se vraťme ke konkrétním údajům ze zadání úlohy. Řešením bude taková funkce $f_2: y = ax$, pro kterou výraz

$$|f_2(7) - 9| + |f_2(10) - 10| + |f_2(15) - 19| + |f_2(4) - 5|$$

nabývá nejmenší možné hodnoty. Dosazením $f_2(x) = ax$ dostáváme výraz

$$|7a - 9| + |10a - 10| + |15a - 19| + |4a - 5|,$$

jehož hodnota je závislá pouze na parametru a . Budeme tedy hledat bod, ve kterém má minimum nově vytvořená funkce

$$g(a) = |7a - 9| + |10a - 10| + |15a - 19| + |4a - 5|.$$

Rozložíme $\mathbb{R}$ na sjednocení disjunktních intervalů oddělených nulovými body výrazů v jednotlivých absolutních hodnotách a vyjádříme funkci g v každém z těchto intervalů předpisem bez absolutní hodnoty. Množina všech takových nulových bodů je $\{1, \frac{5}{4}, \frac{19}{15}, \frac{9}{7}\}$. V tabulce 2 je v každém z pěti vzniklých intervalů vyjádřen každý ze sčítanců i předpis celé funkce g bez absolutních hodnot.

	$(-\infty; 1)$	$\langle 1; \frac{5}{4} \rangle$	$\langle \frac{5}{4}; \frac{19}{15} \rangle$	$\langle \frac{19}{15}; \frac{9}{7} \rangle$	$\langle \frac{9}{7}; \infty \rangle$
$ 10a - 10 $	$-10a + 10$	$10a - 10$	$10a - 10$	$10a - 10$	$10a - 10$
$ 4a - 5 $	$-4a + 5$	$-4a + 5$	$4a - 5$	$4a - 5$	$4a - 5$
$ 15a - 19 $	$-15a + 19$	$-15a + 19$	$-15a + 19$	$15a - 19$	$15a - 19$
$ 7a - 9 $	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$7a - 9$
$g(a)$	$-36a + 43$	$-16a + 23$	$-8a + 13$	$22a - 25$	$36a - 43$

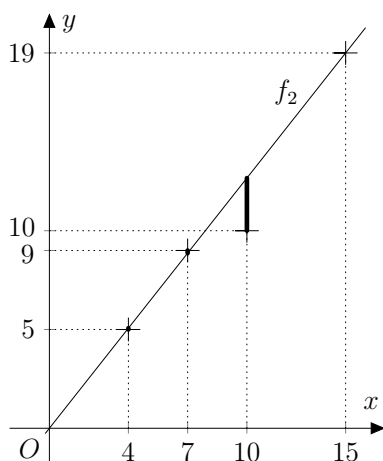
Tabulka 2: Výrazy s absolutními hodnotami a vyjádření funkce g v dílčích intervalech

Vidíme, že v intervalu $(-\infty; \frac{19}{15})$ je funkce g klesající, neboť v každém ze tří dílčích intervalů je směrnice grafu příslušné lineární funkce záporná.⁵⁾ V intervalu $\langle \frac{19}{15}; \infty \rangle$ je naopak funkce g z obdobných důvodů rostoucí. Proto je v bodě $a = \frac{19}{15}$ minimum funkce g a hledaná přímá úměrnost má předpis

$$f_2: y = \frac{19}{15}x.$$

⁵⁾ Jako v předchozí úloze bychom správně ještě měli vzít v úvahu spojitost funkce na řečeném intervalu.

Graf této funkce je znázorněn na obrázku 3; bodem $[15; 19]$ přímo prochází, u dvou ze tří zbylých bodů jsou úsečky tak krátké, že na obrázku téměř nejdou vidět.



Obr. 3 Výsledný model podle metody nejkratších úseček

Stručně poznamenejme, že je u této úlohy možné také představit žákům prakticky velmi využívanou metodu nejmenších čtverců, která je ve většině případů kvůli absenci potřebného matematického aparátu středoškolákům nepřístupná. Zde však díky tomu, že hledáme předpis přímé úměrnosti $f_3: y = ax$, minimalizujeme výraz

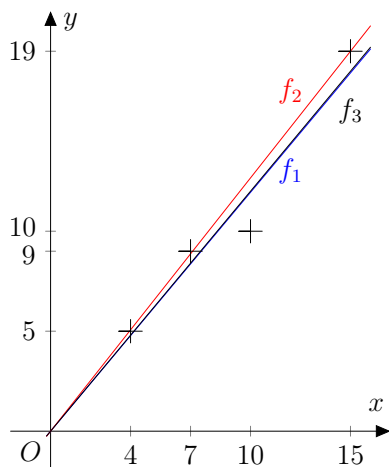
$$\begin{aligned} & (f_3(7) - 9)^2 + (f_3(10) - 10)^2 + (f_3(15) - 19)^2 + (f_3(4) - 5)^2 = \\ & = (7a - 9)^2 + (10a - 10)^2 + (15a - 19)^2 + (4a - 5)^2, \end{aligned}$$

tedy hledáme minimum kvadratické funkce proměnné a . Výpočet provádět nebudeme, čtenáři si však mohou ověřit výsledek

$$f_3: y = \frac{6}{5}x.$$

Tím je naše řešení části b) u konce. Na místě je však všechny tři modely validovat; jaké jsou jejich přednosti a slabiny? Vidíme, že i když se výsledné úměrnosti f_1 , f_2 a f_3 liší (zejména funkce f_2 oproti zbylým dvěma funkcím, viz obr. 4), může se vzhledem k malým rozdílům zdát hledání funkce f_3

nebo f_2 zbytečně komplikované.⁶⁾ Panu vedoucímu by pro reálný odhad času bohatě vystačila funkce f_1 , jejíž předpis jsme získali nejsnadněji. Uvědomme si však, že tento postup je možný jen v případě, že je hledaná funkce přímá úměrnost. Pokud bychom hledali například obecnou lineární funkci $f: y = ax + b$, průměr by k jednoznačnému určení parametrů a a b nestačil. Zdůrazněme však, že kvůli nejednoznačnému zadání úlohy nelze říct, který ze tří modelů je „správný“!



Obr. 4 Srovnání všech tří modelů

V praxi se u podobných úloh na aproximaci funkce podle několika zadaných funkčních hodnot používá zejména metoda nejmenších čtverců. Oproti metodě nejkratších úseček má tu výhodu, že při ní lze využít diferenciálního počtu. Ten se u funkcí, v jejichž předpisu vystupují absolutní hodnoty, dá použít jen s komplikacemi v podobě dělení definičního oboru. V našem konkrétním případě bychom navíc stejně skončili u porovnávání směrnic, jako jsme to udělali. Poznamenejme však, že již na hledání předpisu obecné lineární funkce $f: y = ax + b$ prostředky středoškolské matematiky nestačí, neboť bychom museli najít extrém funkce dvou nezávislých proměnných a a b .

Metoda nejmenších čtverců má však také nevýhodu; oproti metodě nejkratších úseček je snadno ovlivnitelná odlehlými hodnotami, neboť se velké

⁶⁾ Velmi podobný průběh funkcí f_1 a f_3 jde vidět i porovnáním směrnic jejich grafů: $\frac{43}{36}$ a $\frac{6}{5} = \frac{42}{35}$.

odchylky započítávají s umocněnou vahou. To jde vidět i na obr. 4, kde je přímka f_1 blíže odlehlému bodu $[10; 10]$.

Závěr

Matematizací obou uvedených slovních úloh jsme je převedli na obdobný matematický problém, a to na minimalizaci funkce s absolutními hodnotami. Obtížnost první úlohy lze snadno měnit počtem stanovišť a má proto potenciál být využita také jako gradovaná úloha s nejtěžší, zobecněnou variantou. Naopak nejjednodušší verze úlohy s jedním nebo dvěma stanovišti by nemusela dělat problémy ani šikovným žákům základní školy.

Druhá z úloh je zase zajímavá tím, že, i když to tak nemusí na první pohled vypadat, není jednoznačně zadaná. Žáci mohou být často přesvědčeni, že slovní úlohy v hodinách matematiky jsou formulovány jednoznačně a mají jediný „správný“ výsledek. Tato přesvědčení jim mohou později bránit v řešení otevřenějších, ale realitě bližších problémů, viz [6, str. 21]. Zařazováním podobných úloh tak může učitel tato mylná přesvědčení oslabovat.

Poděkování

Příspěvek vznikl s podporou projektu MUNI/A/1569/2024.

Literatura

- [1] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. VÚP, Praha, 2007.
- [2] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia – Funkce. 4. vydání. Prometheus, Praha, 1993.
- [3] *Cizlerová, M., Zahradníček, M., Zahradníčková, A.*: Matematika pro SŠ – 4. díl: Funkce I – učebnice. Didaktis, Brno, 2014.
- [4] *Králová, M., Navrátil, M.*: Matematika pro SŠ – 4. díl: Funkce I – pracovní sešit. Didaktis, Brno, 2014.
- [5] *Robová, J. et al.*: Sběrka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2014.
- [6] *Vondrová, N. et al.*: Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií. Karolinum, Praha, 2019.