

Objavovanie na hodinách matematiky I

MATÚŠ STÁŇA

Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš, SLOVENSKO

Matematické myslenie má v súčasnosti veľký význam. Na školách pripravujeme mladých ľudí, žiakov, aby vedeli fungovať v takom spoločenskom a pracovnom prostredí, o ktorom dnes veľa nevieme. Zažívame technologický progres s rýchlym nástupom umelej inteligencie. Je zrejmé, že to otrasie pracovným trhom. Mnohé povolania tak, ako ich poznáme dnes, nebudú existovať. A vzniknú tiež také, o ktorých dnes nemáme žiadnu predstavu. O to naliehavejšia je otázka, ktorá vzdelávací systém zamestnávala a zamestnáva vždy. Čo je potrebné mladého človeka naučiť? Čo potrebuje vedieť, aby vedel byť uplatniteľným?

Jednou z oblastí, ktoré môžeme skúmať, je obsah. V minulosti bola vedomosť, poznatok, zásadnou konkurenčnou výhodou. V globalizovanej dobe, keď sú informácie dostupné prakticky komukoľvek a kedykoľvek, sa však už takto získaná konkurenčná výhoda nezdá dôležitá. V žiadnom prípade nechceme relativizovať otázku obsahu vzdelávania, je nevyhnutné mať dobrý materiál pre to, aby sa človek mohol učiť. No dôraz by sme mali zamerať už nie na samotnú informáciu, ktorú sa človek naučí, ale na to, ako vzdelávací obsah podporuje proces učenia sa žiaka. Dostávame sa tak k druhej dôležitej oblasti, nad ktorou by sme sa mali zamýšľať. A tou je forma. Ako nastaviť vzdelávací proces tak, aby sa žiak efektívne učil? Aké metódy a formy použiť? Aké úlohy a problémy zadávať?

Uvedené otázky sú rozhodujúce aj pre vyučovanie matematiky na základných a stredných školách. Matematika nie je len veda opisujúca svet. Nie je to len zoskupenie niekoľkých definícií a vzťahov, ktoré sa žiak má naučiť a pomocou nich vyrieši určitú sadu pripravených úloh. Matematika je o myslení, je o prístupe k poznávaniu sveta. Ak prijmeme tento pohľad, znamená to, že aj na hodinách matematiky musíme ako učitelia chcieť, aby žiaci nielen reprodukovali naučené vzorce. Naša snaha je zameraná na to, aby sme žiakov naučili matematicky myslieť. Čo to však znamená v praxi?

Predkladaný text vychádza zo skúseností jeho autora, ktorý pracuje ako učiteľ matematiky na strednej škole – gymnáziu. Na vyššie položené

otázky neexistujú jednoduché odpovede. Každá trieda, každý žiak je iný. Čo funguje v jednej skupine, v druhej už fungovať nemusí. Čo sa ukáže ako efektívne dnes, zajtra už takým nebude. Príklady uvedené v článku majú slúžiť len ako inšpirácie. Veríme, že môžu obohatiť aktuálne diskusie v matematickej obci.

Učenie sa v matematike

Ľudský mozog dokáže realizovať rôzne procesy s odlišnou mierou náročnosti. Je to všeobecne známy poznatok, ktorý sa odzrkadľuje v teoretických modeloch známych ako taxonómie kognitívnych (alebo iných) funkcií. Existuje ich viacero. Bloomova taxonómia, jej revidovaná podoba (Krathwohl–Anderson), Niemierkova klasifikácia a pod. Nie je cieľom článku ich vzájomne porovnávať či popisovať. Je to ale jasná ilustrácia, že činnosti, ktoré náš mozog realizuje, sú rôzne. Schopnosť zapamätať si informáciu je síce východisková a základná schopnosť vyššej nervovej sústavy, no bolo by málo ostať len pri nej. Na ňu je potrebné nadväzovať ďalšími procesmi. Vzhľadom na nejasné výzvy v budúcnosti je tiež dôležité, aby mladý človek (žiak) vedel to, čo sa naučí, uplatniť aj v podmienkach, na ktoré sa nepripravil. Mnohí autori hovoria o tzv. metakognitívnych schopnostiach [1, 5]. Nestačí, ak žiak vie excelentne zadefinovať konjunkciu či disjunkciu a bez akýchkoľvek problémov vyplní tabuľku pravdivostných hodnôt pre danú výrokovú formu zapísanú pomocou premenných. Je to málo platné, ak si v dospelosti ako manažér prečíta nejakú legislatívu, ktorá sa týka jeho podnikania, ale použitú matematickú logiku v nej nevidí.

Ak chceme, aby žiak bol schopný používať svoje matematické schopnosti prirodzene aj pri riešení problémov, s ktorými sa ešte nestretol, je potrebné mu aj v škole na to vytvoriť príležitosť. Učenie sa žiaka musí byť už v škole aktívne, žiak potrebuje priestor pre experimentovanie, pre modelovanie. V našom prostredí je známy prístup didaktického konštruktivismu, ktorý formulovali M. Hejný a F. Kuřina [3]. Vníma matematiku ako proces, nie len výsledok. Dôraz je na vlastnej práci žiaka, jeho objavovaní, na interakcii aj so spolužiakmi v triede. Tento prístup je základným didaktickým východiskom, o ktoré sa autor tohto článku opiera. Sme si však vedomí, že reálne uplatňovanie tohto konceptu naráža na praktické obmedzenia. Vytvoriť žiakovi priestor objavovať je časovo náročné, kladie to špecifické požiadavky na prácu učiteľa a najmä, je potrebné vytvoriť prostredie, ktoré je objavovaniu naklonené. Tu myslíme najmä na problémy a úlohy, ktoré žiaci riešia.

V ďalšom texte sa zameriame na poslednú z vyššie uvedených prekážok. Aké problémy pred žiaka položiť, aby mal priestor objavovať? Len stručne uvedieme, že po organizačnej a formálnej stránke realizujeme nižšie uvedené aktivity na voliteľných predmetoch z oblasti matematiky, kde nás nelimitujú vzdelávacie štandardy či cieľové požiadavky.

Základnou otázkou teda je, aký problém žiakovi ponúknuť, aby mal možnosť objavovať. Na jednej strane nemôže ísť o problematiku veľmi jednoduchú, pre žiaka rutinnú. Musí mať priestor na objavovanie. Na druhej strane, ak zvolíme príliš náročné problémy, žiak môže rýchlo stratiť motiváciu, resp. objavovanie bude pre neho prakticky nemožné, lebo nemá na čom stavať. V našej praxi sa nám osvedčila oblasť teórie grafov. Tejto oblasti sa štandardne na stredných či základných školách nevenujeme (aspoň v slovenskom prostredí). Túto námietku si uvedomujeme. Teóriu grafov však pokladáme za vhodnú ilustráciu a ak bude mať učiteľ na jej začlenenie určitý priestor, odporúčame to. Či už na nejakom voliteľnom predmete z matematiky, školskom krúžku alebo ak učiteľovi ostane čas aj na bežnej hodine matematiky.

Teória grafov ako priestor pre objavovanie

Už malé deti sa stretnú s problémom kreslenia jedným ťahom. Kreslíme domčeky či iné objekty. Práve kreslenie jedným ťahom stálo aj pri zrode teórie grafov. Túto problematiku sme si ako predmet skúmania pre voliteľný predmet Seminár z matematiky vybrali z niekoľkých dôvodov.

Prvým je jednoduchosť a intuitívnosť riešenia problémov. Ako uvidíme na vzorových úlohách nižšie, k riešeniu mnohých problémov z teórie grafov možno pristúpiť veľmi intuitívne. Netreba poznať žiadne vstupné definície či fakty. Je možné si zaviesť spoločný pojmový aparát (graf, vrchol, hrana), no nie je to nevyhnutné. Zadané problémy rieši žiak experimentovaním. Skúša, skúma, premýšľa a hľadá algoritmy. Podľa veku a vyzretosti žiaka je možné očakávať rôznu úroveň abstrakcie a všeobecnosti pri formulácii algoritmov.

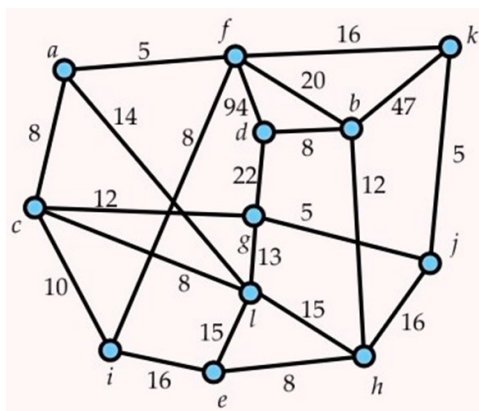
Druhým dôvodom je motivačný potenciál. Je to niečo iné, ako to, na čo sú žiaci na hodinách matematiky zvyknutí. Často sú tieto problémy pre žiakov zaujímavé. Navyše, k teórii grafov existuje veľké množstvo praktických aplikácií, ktoré aj žiak považuje za naozaj užitočné (dopravné siete, inžinierske siete, manažérske rozhodovanie a pod.).

Tretím dôvodom je dobrá práca s problematikou na hodine z pohľadu učiteľa. Učiteľ môže dávať doplňujúce otázky, upravovať zadania, reagovať na dianie v triede.

V neposlednom rade treba zdôrazniť, že riešenie problémov z tejto oblasti je vhodné či pre žiaka druhého stupňa základnej školy alebo pre stredoškolačka. Stačia minimálne zmeny vo formulácii úlohy. Skúsenosti autora s prácou v triede sú pozitívne. Aj žiaci, ktorí sú v klasickej školskej matematike slabší, sa tu vedia nájsť. Autor na týchto úlohách pracuje so žiakmi tretieho ročníka gymnázia (17–18roční žiaci). Používa ich na predmete Seminár z matematiky, čo je voliteľný predmet, no nevyberajú si ho len žiaci so záujmom o maturitu z matematiky. V skupine je približne 18 žiakov a vzhľadom na podmienky školy, kde autor pracuje, sú aktivity navrhnuté na cca 70 minút (seminár je organizovaný ako „dvojhodinovka“). Tieto informácie uvádzame len preto, aby bol zrejmý kontext, v akom žiaci pracujú. V ďalšom texte uvádzame tri ilustrácie. Tri príklady, ktoré sme na hodinách riešili. K nim pripájame aj komentáre a poznámky, ktorých cieľom je ilustrovať reakciu žiakov na hodine a ich následnú spätnú väzbu. Celkovo sme sa téme venovali v rámci ôsmich lekcí. Každú lekcii tvorila jedna vyučovacia jednotka (v tomto prípade dvojhodinovka).

Problém 1

Na obrázku 1 je plán dátového rozvodu v staršej budove. Kabeláž je potrebné vymeniť a sieť zjednodušiť, nakoľko jej neprehľadnosť predražuje údržbu. Čísla medzi uzlami vyjadrujú vzdialenosť uzlov (minimálnu dĺžku kábla medzi nimi).



Obr. 1 Graf je prevzatý z [6]

Navrhnite nový spôsob prepojenia tak, aby ste prepojili všetky pôvodné uzly do jednej siete, ale minimalizovali dĺžku kábla, a tým aj zložitosť siete.

Poznámka. Postačuje, aby existovalo ľubovoľné prepojenie medzi uzlami, nie nutne priame. Napr. v pôvodnej sieti bol prepojený uzol „c“ a uzol „l“, čo však nie je nutné, ak ostanú prepojené cez uzly „i“ a „e“.

Z hľadiska teórie grafov ide v úlohe o nájdenie tzv. minimálnej kostry. Algoritmov, ktoré slúžia na nájdenie minimálnej kostry grafu, je viacero. Ako sme však už uviedli, žiaci predtým nepreberali všeobecné poznatky a algoritmy teórie grafov. Dostali len túto úlohu a začali skúšať. Je prirodzené, že najprv boli ich pokusy celkom intuitívne. Každý vytvoril nejaký upravený spojitý graf a spočítal zostávajúcu dĺžku kábla. Do určitej miery takto žiaci medzi sebou súperili o minimálnu dĺžku. Mohli pracovať aj v skupinách, diskutovať, premýšľať. Učiteľ postupne prechádzal jednotlivými skupinami a ak to bolo potrebné, formuloval podporné otázky. V prípade tejto úlohy platí, že pre žiakov predstavovala zvládnuateľnú výzvu a potreba podporných otázok bola minimálna.

Žiaci potrebovali len čas. Po niekoľkých desiatkach minút svojím experimentovaním sami prišli na mnoho dôležitých skutočností. Napr. že im nesmú ostať žiadne cykly. Zaujímavým a dôležitým bol tiež alternatívny pohľad na úlohu. Nemusíme sa na ňu zamerať len tak, že postupne budeme odstraňovať spojenia, ale naopak, môžeme si odmyslieť všetky spojenia (hrany grafu) a jednotlivé uzly (vrcholy grafu) pripájať postupne. Tento postreh pokladáme za významný, nakoľko často je pri riešení problémov (v matematike aj mimo nej) potrebné pozrieť sa na situáciu inak. Prakticky všetci žiaci napokon vhodný algoritmus našli. Na záver sa celá skupina spoločne s učiteľom venovala presnejšej formulácii algoritmu. V skupine sme „objavili“ Kruskalov algoritmus minimálnej kostry. Celá práca trvala žiakom do 60 minút.

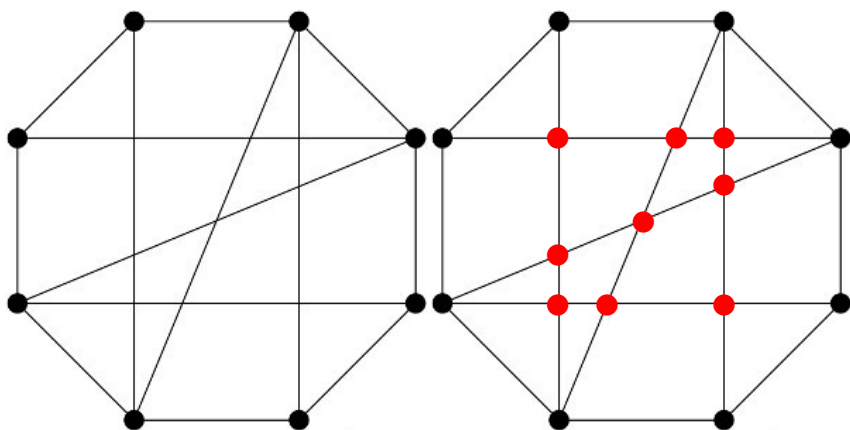
Problém 2

Na obrázku 2 je schéma dopravného vlakového spojenia medzi 8 mestami (označené čiernymi bodmi). Pri posielaní schémy projektantovi však tento schému zle pochopil a ako mestá uvažoval aj ďalšie priesečníky ciest (červené body na obrázku vpravo).

Je možné schému prekresliť tak, aby k podobnému nedorozumeniu nemohlo dôjsť?

V prípade tejto úlohy ide o problematiku rovinných (planárnych) grafov, t. j. takých, ktorých dve rôzne hrany nemajú iné spoločné body okrem vrcholov. Učiteľ využil túto úlohu ako úvodnú motiváciu. Práca žiakov trvala do desať minút a nakoniec všetci prekreslili graf v planárnej podobe. Uve-

domili si pri tom veľmi dôležitú myšlienku, že ak chceme zachytiť grafom nejakú situáciu, je dôležité najmä dodržať počet vrcholov a charakter spojení. Tzn. ak má byť vrchol A spojený s vrcholom B, tak ich je potrebné spojiť, no na tom, kadiaľ toto spojenie (hrana) bude viesť, často nezáleží. Predchádzajúce dve vety sme uviedli tak, ako ich formulovali žiaci. Možno im vytknúť určitú pojmovú voľnosť, no v podstate žiaci vnímajú význam izomorfizmu (v tomto prípade izomorfizmu grafov). Pojem samotný a jeho definíciu sa študenti naučia na vysokej škole, no je dôležité, že s touto myšlienkou pracujú. Je to určitý princíp matematického modelovania, „ohýbať“ realitu tak, aby sa problém zjednodušoval, no zároveň, aby sa nezmenil jeho charakter.



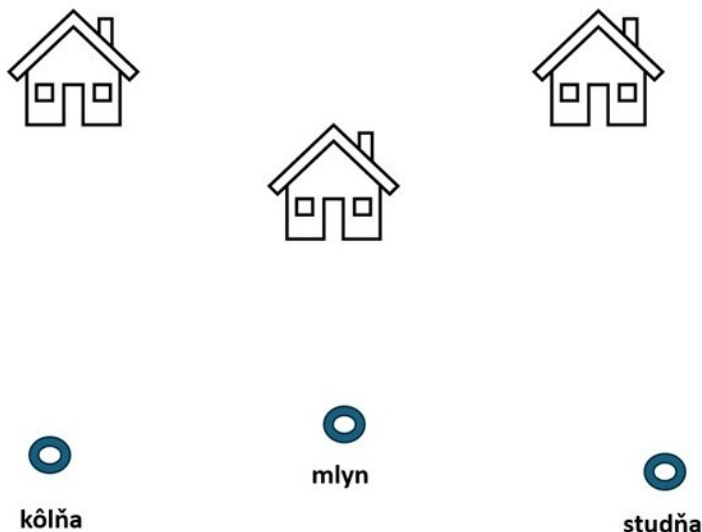
Obr. 2 <http://matematika.reseneulohy.cz>

Na túto úlohu sa na hodine nadviazalo ďalšími cvičeniami. Žiaci dostali rôzne grafy (na internete je dostupná ich široká škála, príp. ich učiteľ môže kresliť aj sám) a mali ich prekresliť ako rovinné. Študenti objavili, že to nie vždy ide. Príkladom je aj nasledujúca úloha.

Z každého domu majú viesť 3 samostatné cesty – jedna k studni, jedna k mlynu a jedna ku kôlni (obr. 3). Žiadna z ciest nesmie križovať inú. Ako cesty vybudovať?

Ide o problematiku grafu $K(3,3)$. Tento nie je možné zakresliť ako rovinný. Znovu však treba oceniť skúmanie žiakov. Veľmi ľahko prišli na to, že stačí využiť nejaké mosty či tunely. Z matematického pohľadu teda

zistili, že úloha síce nie je riešiteľná v rovine, ale na inom type plochy áno. Ako poznámku uvedieme ešte veľmi inšpiratívne hodnotenie jedného zo žiakov, ktorý si uvedomil, že ak by domčeky a hospodárske stavby nakreslil na hrniec, riešenie by našiel (využil by prítomnosť uší na hrnci).



Obr. 3

Aj pri tejto úlohe platí, že žiaci pracovali veľmi tvorivo, nebáli sa experimentovať a diskutovali o probléme.

Problém 3

Na obrázku 4 je mapa cestnej siete fiktívneho mesta. Všetky cesty možno prechádzať v oboch smeroch s výnimkou jednosmerných úsekov, ktoré sú označené šípkou: tá označuje smer, v ktorom možno úsek prejsť. Každý úsek je označený aj časovou značkou – číslom, ktoré udáva priemerný čas potrebný na prejdienie úseku. Úsekom vždy rozumieme časť cesty od križovatky po križovatku, pričom v meste sú križovatky tvaru X a T.

- 1) Za aký najkratší čas sa dostaneme zo skladiska do predajne? Kadiaľ najkratšia cesta bude viesť?
- 2) Vedeli by ste situáciu zachytiť vo forme vhodného grafu? Čo by predstavovalo vrcholy a čo hrany grafu?

- 3) Pokúste sa naformulovať algoritmus, ktorým by ste najkratšiu cestu našli aj v oveľa zložitejšom grafe.

livých vrcholoch (v prípade našej úlohy je vrcholom vždy križovatka). Pri tvorbe grafu, ktorý by prezentoval zadanú úlohu, nemali žiaci problém zakresľovať „jednosmerky“ (používať teda orientovaný graf). Táto úloha bola v našej praxi zaujímavá svojím poukázaním na skutočnosť, že niekedy je oveľa dôležitejšie objavovať ako objaviť. Aj napriek tomu, že žiaci sami nedospeli k výsledku (pri časti 3), ich objavovanie malo veľký zmysel.

Záver

Cieľom článku bolo priniesť inšpirácie učiteľom matematiky základných a stredných škôl. Chceli sme poukázať na to, že ak vytvoríme priestor a použijeme vhodný obsah prijateľným spôsobom, môžeme aplikovať konštruktivistické objavovanie aj na hodinách matematiky. Zároveň sme chceli ilustrovať aj vhodnosť problematiky teórie grafov pre tento účel. Vybrali sme len trojicu problémov, ktorým sme sa venovali priamo na vyučovaní. Teória grafov ponúka viacero možností. Zaujímavé sú úvahy o kreslení jedným ťahom v neorientovaných i orientovaných grafoch, odvodenie a dôkaz Eulerovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe (kde sa veľmi prirodzeným a zaujímavým spôsobom používa dôkaz matematickou indukciou) či problematika farbenia grafov. Veríme, že uvedené ciele sa nám podarilo naplniť.

Literatúra

- [1] *Anderson, L. W., Krathwohl, D. R.*: A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Longman, New York, 2001.
- [2] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1987.
- [3] *Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.
- [4] *Matoušek, J., Nešetřil, J.*: Kapitoly z diskrétní matematiky. Karolinum, Praha, 2002.
- [5] *Nelson, T., Narens, L.*: Metamemory: A theoretical framework and new findings. In: Psychology of Learning and Motivation. Vol. 26, 1999, p. 125–173 [online]. [cit. 2023-06-30] <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079742108600535?via%3Dihub>.
- [6] <https://studyx.ai/questions/4m0q9gk/the-image-contains-a-graph-with-nodes-and-edges-labeled-with-numerical-values-the>