

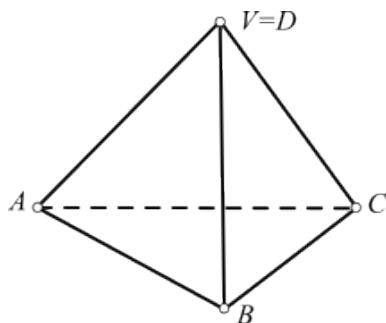
Trojboký jehlan nebo čtyřstěn?

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Třebaže lze totéž těleso znázorněné na obr. 1 nazývat *trojboký jehlan* i *čtyřstěn*, je mezi oběma pojmy rozdíl.

U trojbokého jehlanu $ABCV$ rozlišujeme *podstavu* ABC , vrcholy podstavy, hlavní vrchol V , boční stěny ABV , BCV , CAV , boční hrany a podstavné hrany ([1], str. 58). Navíc má jehlan jedinou výšku, vzdálenost hlavního vrcholu od roviny podstavy. Standardně se zobrazuje s podstavou ve vodorovné rovině.



Obr. 1 Jehlan $ABCV$, těleso totožné se čtyřstěnem $ABCD$

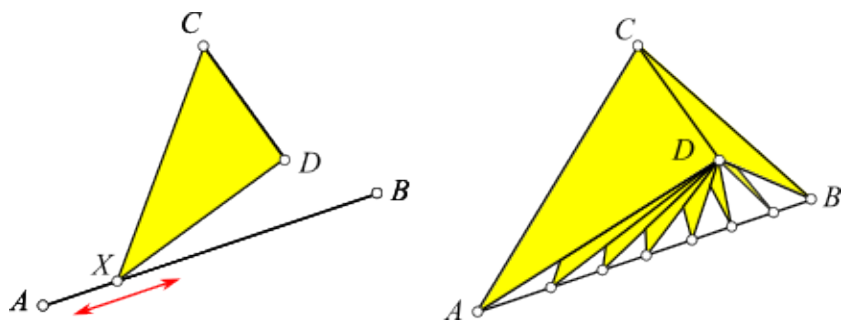
Čtyřstěn má čtyři výšky, z každého vrcholu jednu. Všechny jeho vrcholy, hrany i stěny jsou rovnoprávné, což představuje pohled na těleso jako na prostorovou analogii trojúhelníku a usnadňuje studium jeho vlastností. Termín čtyřstěn se uvádí až na střední škole a vzniká dojem, že je to pojem nadbytečný, neboť k podrobnějšímu studiu se nedostává čas. Původní představa tělesa jako trojbokého jehlanu zůstává, a tak si například málokdo dokáže představit čtyřstěn vepsaný do krychle...

V článku připomeneme některé základní vlastnosti čtyřstěňů a ukážeme užitečnost tohoto pojmu z hlediska rozvoje prostorové představivosti.

Začneme definicí. Obvykle se čtyřstěň $ABCD$ definuje pro nekomplanární body A, B, C, D jako průnik poloprostorů $ABCD, BCDA, CDAB$ a $DABC$. S cílem posílit prostorové myšlení a oprostit se od představy čtyřstěně jako standardně umístěného jehlanu, vyjdeme raději z obr. 2 a definice 1.

Definice 1

Jsou-li AB a CD mimoběžné úsečky, pak sjednocení všech trojúhelníků CDX , kde X je bod úsečky AB , se nazývá *čtyřstěň* $ABCD$.



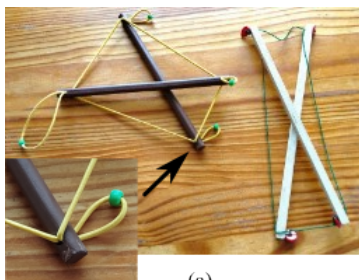
Obr. 2 Ilustrace k definici 1

Poznamenejme, že je odtud zřejmá nekomplanárnost bodů A, B, C, D , a tedy i mimoběžnost libovolných dvou protilehlých hran čtyřstěně.

K demonstraci těchto těles a jejich prostorových umístění poslouží dynamický model ze dvou dřevěných tyček, čtyř korálků nebo knoflíků a kloboukové gumy. Na obr. 3 (a) vidíme, jak jej lze vyrobit. Další snímky jsou ukázky využití: (b) čtyřstěň v poloze, kdy jsou dvě protilehlé hrany umístěné vodorovně; (c) čtyřstěň se zvrhne ve čtyřúhelník, leží-li protilehlé hrany v rovině; (d) trojboký jehlan ve standardní poloze.

Hranou AB čtyřstěně $ABCD$ lze vést právě jednu rovinu $\alpha \parallel CD$ a hranou CD právě jednu rovinu $\alpha' \parallel AB$. Obě roviny ohraničují vrstvu v níž čtyřstěň leží, obr. 4. Analogicky existují ke zbývajícím protilehlým hranám čtyřstěně další dvě dvojice rovnoběžných rovin, (β, β') a (γ, γ') .

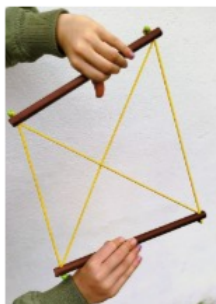
Všech šest rovin určuje rovnoběžnostěn $AEBFGDHC$ čtyřstěně opsaný, obr. 5. Hrany čtyřstěně se kryjí s šesti stěnovými úhlopříčkami rovnoběžnostěnu. Zbýlé úhlopříčky určují čtyřstěň $HGEF \simeq ABCD$. Platí věta 1.



(a)



(b)

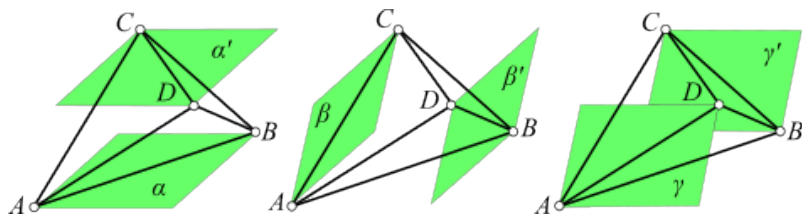


(c)



(d)

Obr. 3 Dynamický model čtyřstěnu



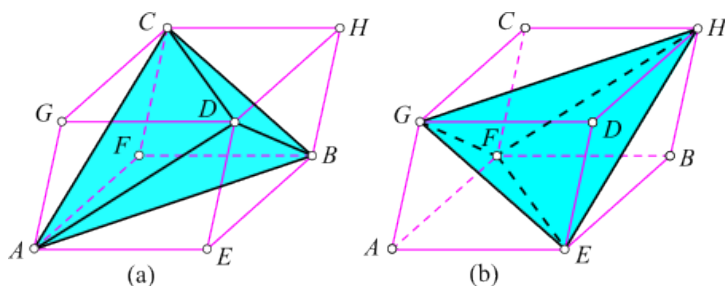
Obr. 4 Tři dvojice rovnoběžných rovin, které ohraničují čtyřstěn $ABCD$

Věta 1

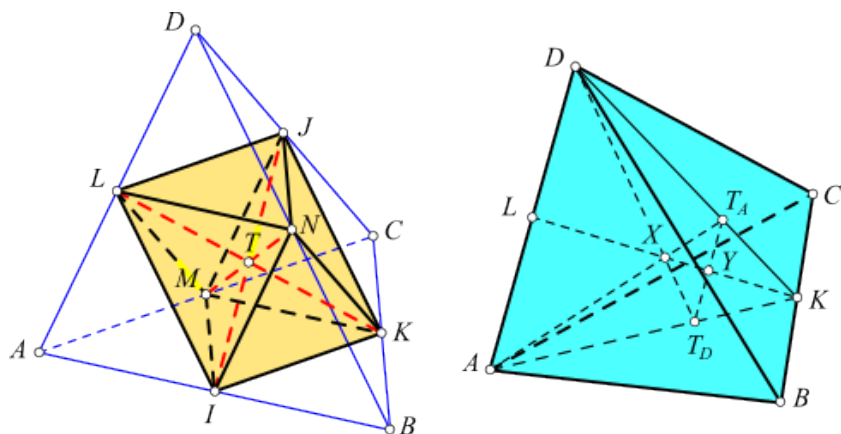
Každému čtyřstěnu lze opsat právě jeden rovnoběžnostěn a do každého rovnoběžnostěnu lze dvěma způsoby vepsat jediný čtyřstěn.

Definice 2

Střední příčka čtyřstěnu je úsečka s krajními body ve středech jeho protilehlých hran. Úsečka, jež spojuje vrchol čtyřstěnu s těžištěm protilehlé stěny, se nazývá *těžnice čtyřstěnu*.



Obr. 5 Jediná dvě umístění čtyřstěnu vepsaného do rovnoběžnostěnu



Obr. 6 K vlastnostem středních příček a těžnic čtyřstěnu

Čtyřstěn $ABCD$ na obr. 6 vlevo má střední příčky IJ , KL a MN . Po všimněme si, že úsečky IL a JK jsou též střední příčky trojúhelníků BDA a BDC . Platí $IL \parallel BD \parallel JK$ a $|IL| = \frac{1}{2}|BD| = |JK|$. Obrazec $KJLI$ je tedy rovnoběžník a jeho úhlopříčky IJ a KL mají společný střed T .

Z rovnoběžníku $INJM$ analogicky plyne, že bod T půlí i střední příčku MN . Osmistěn $IKJLMN$ je tzv. duální těleso k opsanému rovnoběžnostěnu (má vrcholy ve středech jeho stěn). Ukážeme, že bodem T procházejí i těžnice čtyřstěnu.

Označme po řadě T_D a T_A těžiště stěn BCA a BCD , obr. 6 vpravo. Z vlastností těžnic plyne, že úsečka AD je obrazem úsečky $T_A T_D$ ve stejnolehlosti se středem K a koeficientem 3. Je i obrazem úsečky $T_A T_D$ ve stejnolehlosti se středem X a koeficientem -3 , kde $X = AT_A \cap DT_D$.

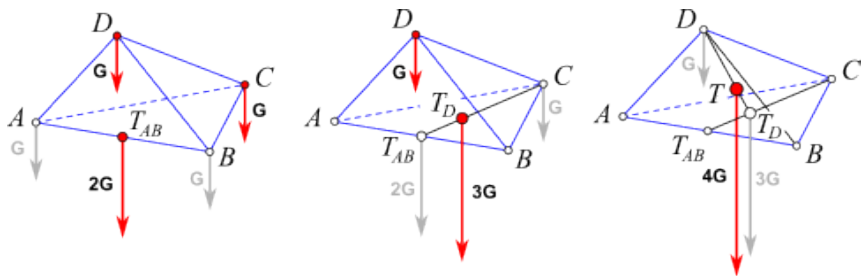
Obě stejnolehlosti zobrazují střed Y úsečky $T_A T_D$ na střed L hrany AD . Body K , Y , L a X jsou kolineární a platí

$$|LX| = \frac{3}{4}|LY| = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}|KL| \right) = \frac{1}{2}|KL| \quad \text{neboli} \quad X = T.$$

Poznatky shrneme do věty 2.

Věta 2

Střední příčky čtyřštěnu procházejí svým společným středem T , tzv. *těžištěm čtyřštěnu*. Bodem T prochází i všechny těžnice ZT_Z čtyřštěnu, $Z \in \{A, B, C, D\}$, a platí $|ZT| : |TT_Z| = 3 : 1$.



Obr. 7 Odvození polohy těžiště skládáním sil

Jednoduché odvození druhého tvrzení věty 2 (postavené na učivu fyziky ze 7. ročníku ZŠ) znázorňuje obr. 7. Vycházíme z představy, že A , B , C , D jsou hmotné body, každý o hmotnosti m . Postupným skládáním tíhových sil nalezneme výslednici a soustavu nahradíme hmotným bodem $(T, 4m)$.

Každý ze tří nákrešů na obr. 7 znázorňuje jednu fázi celého procesu. Červeně jsou vyznačeny síly, které na soustavu v dané situaci působí, šedě jsou pak znázorněny ty, které byly nahrazeny jejich výslednicí.

Působíště T výsledné síly je jednoznačně určeno a nezávisí na pořadí, v jakém síly skládáme. Podle zákona páky je T_{AB} středem úsečky AB (obr. 7 vlevo). V prostřední části obr. 7 platí

$$|T_D C| : |T_D T_{AB}| = 2G : G = 2 : 1,$$

a analogicky pro situaci napravo zjistíme, že $|TD| : |TT_D| = 3 : 1$.

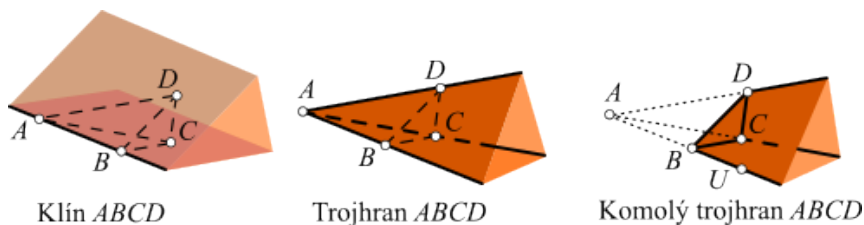
Změnou postupu skládání můžeme obdobně dokázat i první část věty 2.

Analogií poznatku, že trojúhelníku lze opsat kružnici, je věta 3, jejíž zdůvodnění ponecháme čtenáři.

Věta 3

Všechny tři roviny souměrnosti stran každé stěny čtyřstěnu se protínají v přímce, jež je na ni kolmá a prochází středem kružnice stěně opsané. Tyto čtyři kolmice ke stěnám mají společný bod (průnik šesti rovin souměrnosti hran), který je středem kulové plochy čtyřstěnu opsané.

Ke každému trojúhelníku existují čtyři kružnice, které se dotýkají všech jeho stran jako přímkou. U čtyřstěnu to jsou *kulové plochy* neboli *sféry*, které se dotýkají všech čtyř rovin, v nichž leží jeho stěny. Situaci vyšetříme s využitím pojmů klín a trojhran.



Obr. 8 Klín, trojhran a komolý trojhran

Definice 3

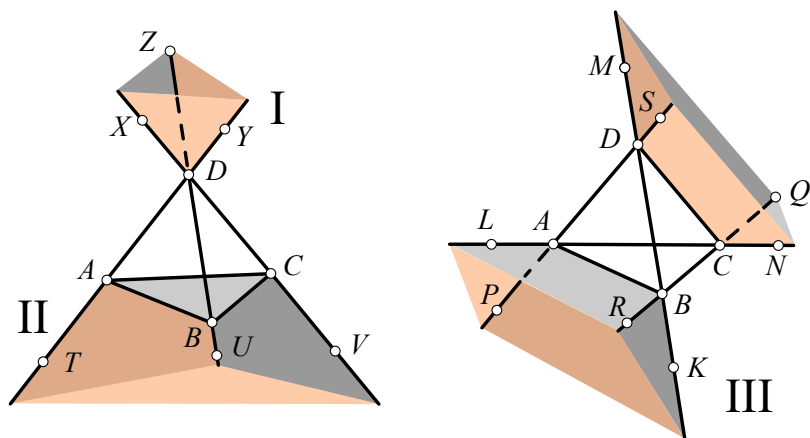
Nechť $ABCD$ je čtyřstěn. *Klínem* $ABCD$ (resp. $ABDC$) rozumíme průnik poloprostorů $ABCD$ a $ABDC$, přímku AB nazýváme *hrana klínu*, poloroviny ABC a ABD jsou *stěny klínu*. Je-li σ ta rovina souměrnosti klínu, jež obsahuje přímku AB , pak *symetrálou klínu* nazveme její průnik s klínem (tzn. polorovinu, jejíž hraniční přímkou je AB a vnitřním bodem průsečík roviny σ s úsečkou CD). Průnik klínů $ABCD$ a $ADBC$ se nazývá *trojhran* $ABCD$. *Komolý trojhran* $ABCD$ je průnik trojhranu $ABCD$ s klínem $BDCU$, kde U je vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce BA .

Roviny stěn čtyřstěnu rozdělují prostor na 15 částí. Z nich jediným konečným útvarem je čtyřstěn sám. Průnikem symetrál klínů $ABCD$, $BCDA$ a $CDAB$ je bod čtyřstěnu stejně vzdálený od jeho stěn, střed *sféry vepsané čtyřstěnu*.

Čtyři *části typu I* jsou trojhrany přilehlé vrcholům čtyřstěnu, např. trojhran $WXYZ$ při vrcholu D na obr. 9. Kulové plochy vepsané do těchto trojhranů se nemohou dotýkat rovin protilehlých stěn čtyřstěnu. Neexistují tedy sféry připsané čtyřstěnu při jeho vrcholech.

Další čtyři části jsou *útvary typu II*, *komolé trojhrany* přilehlé ke stěnám čtyřstěnu. Do každého z nich lze vepsat kulovou plochu, která je *sférou připsanou čtyřstěnu k příslušné stěně* (analogie kružnice připsané trojúhelníku). Středem sféry připsané ke stěně ABC je například průnik symetrál klínů $ABTC$, $BCUA$ a $CAVB$.

Zbývajících šest útvarů *typu III*, nazveme je *střechy*, jsou přilehlé hranám čtyřstěnu. Střecha $ABKL$ při hraně AB z obr. 9 je průnikem klínů $CDAB$ a $ABKL$. Protilehlá k ní je střecha $CDMN$. Existuje-li sféra vepsaná střeše $ABKL$, pak je to *kulová plocha připsaná čtyřstěnu $ABCD$ při hraně AB* .



Obr. 9 Roviny stěn čtyřstěnu dělí prostor na části typu I, II a III

Věta 4

Sféru je možné vepsat nejvýš jedné ze dvou protilehlých střeš čtyřstěnu.

Důkaz. Symetrály klínů $LABP$ a $NCDQ$ (obr. 9) leží v téže rovině, označme ji σ_1 . Analogicky leží symetrály klínů $APBL$, $DSMC$ v rovině σ_2 a symetrály klínů $RBKA$, $CQDN$ v rovině σ_3 . Přímký AP a RB jsou mimoběžky, a tak může být $\sigma_2 \parallel \sigma_3$ neboli $\sigma_3 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Pak nelze ani jedné z obou střeš vepsat kulovou plochu. Je-li $\sigma_3 \nparallel \sigma_2$, protínají se všechny tři roviny v jediném bodě, který leží v právě jedné z obou doplňkových střeš. Je to střed sféry připsané čtyřstěnu při jedné z hran AB , CD .

Věta 5 (důsledek věty 4 a předchozích úvah)

Ke každému čtyřstěnu existuje celkem 5-8 kulových ploch, které se dotýkají všech čtyř rovin ohraničujících čtyřstěn. Z nich jedna je čtyřstěnu vepsaná, čtyři připsané ke stěnám a nejvýše tři připsané při hranách.

Příklad 1

Určete poloměry všech sfér, jež se dotýkají rovin stěn pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s hranou délky a .

Řešení. Čtyřstěn má výšku $v = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ([4], úloha 3.55) a jeho stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky s obsahem $S = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Hledané poloměry určíme snadno metodou dvojího vyjádření objemu V daného čtyřstěnu.

Označme $\mathcal{K}_1(O_1; r_1)$ sféru čtyřstěnu vepsanou. Její střed O_1 tedy leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, který je sjednocením čtyřstěnů $ABCO_1$, $BCDO_1$, $CDAO_1$ a $DABO_1$. Platí

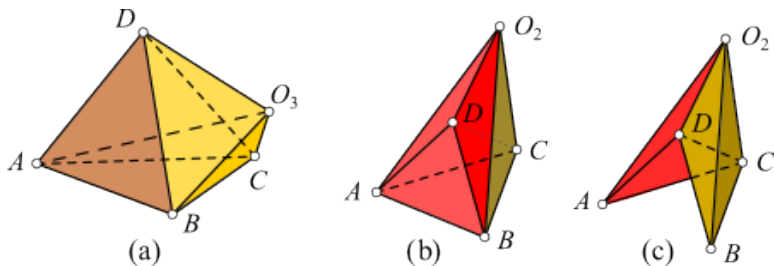
$$V_{ABCO_1} + V_{BCDO_1} + V_{CDAO_1} + V_{DABO_1} = V$$

neboli

$$\frac{4r_1 S}{3} = \frac{aS}{3} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a tak

$$r_1 = \frac{a}{12} \sqrt{6}. \quad (1)$$



Obr. 10 (a) $BCDAO_3$, (b) $ABO_2C \cup ABO_2D$, (c) $BCDO_2 \cup ACDO_2$

Čtyři sféry připsané ke stěnám čtyřstěnu mají stejný poloměr r_3 , jenž zjistíme analogicky. Například střed O_3 sféry připsané ke stěně BCD leží uvnitř komolého trojhranu $ABCD$. Ve shodě s obr. 10 (a) obdržíme

$$V_{CDAO_3} + V_{DABO_3} + V_{ABCO_3} - V_{BCDO_3} = V \Rightarrow r_3 = \frac{a}{6} \sqrt{6} = 2r_1. \quad (2)$$

Pravidelný čtyřstěn nemá kulové plochy připsané při hranách. Kdyby totiž například existovala sféra připsaná čtyřstěnu k nějaké hraně, musela by vzhledem k jeho symetrii existovat i při hraně protilehlé. To však není podle věty 4 možné.

Lze to ověřit i výpočtem. Existuje-li střed O_2 kulové plochy připsané čtyřstěnu při hraně CD , nachází se uvnitř přilehlé střechy. Čtyřstěn $ABCD$ se nachází v trojbokém dvojjehlanu ABO_2CD , protože vrcholy C a D leží v opačných poloprostorech s hraniční rovinou ABO_2 . Pomocí obr.10 (b) a (c) zjistíme, že platí $(V_{ABCO_2} + V_{ABDO_2}) - (V_{CDBO_2} + V_{CDAO_2}) = V$. Odtud po úpravě obdržíme rovnici $0 \cdot r_2 = V$ s neznámou r_2 , která nemá řešení, neboť $V \neq 0$.

Závěr. Pravidelný čtyřstěn má pouze jednu sféru vepsanou a čtyři kulové plochy připsané u stěn. Jejich poloměry jsou dány vztahy (1) a (2).

Příklad 2

Ve čtyřstěnu $ABCD$ platí $AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $CD \perp AD$ a $|AD| = |BD| = |CD| = a$. Výpočtem i konstrukcí stanovte poloměry kulových ploch, jež se dotýkají hraničních rovin čtyřstěnu.

Řešení. Snadný výpočet poloměrů metodou dvojího vyjádření objemu čtyřstěnu již nebudeme opakovat. K řešení zvolíme trigonometrický postup, který zároveň poskytne návod k provedení konstrukce.

Nejprve určíme poloměr kulové plochy $\mathcal{K}_{CD}(O_{CD}; r_4)$ připsané při hraně CD . Vyjdeme z obr. 11, kde E, F jsou po řadě obrazy bodů A, B v symetrii se středem D . Doplňme-li čtyřstěn $DEFC$ na krychli $DEQFCXPY$, pak je polopřímka $p = DP$ množinou těch bodů pravoúhlého trojhranu $DEFC$, jež mají od jeho stěn stejnou vzdálenost. Navíc leží v rovině CSD , kde S je střed hrany AB .

Rovina CSD protíná sféru $\mathcal{K}_{CD}$ v hlavní kružnici $k_4(O_{CD}; r_4)$. Její průsečík se symetrálou σ klínu $ABCD$ je střed O_{CD} . Z podobnosti trojúhelníků $DO_{CD}T$ a DPQ zjistíme

$$|DT| = r_4\sqrt{2}.$$

Dále stanovíme odchylku ε symetrály σ od roviny ABD , abychom mohli vyjádřit r_4 pomocí dané délky a . Z trojúhelníku CSD plyne

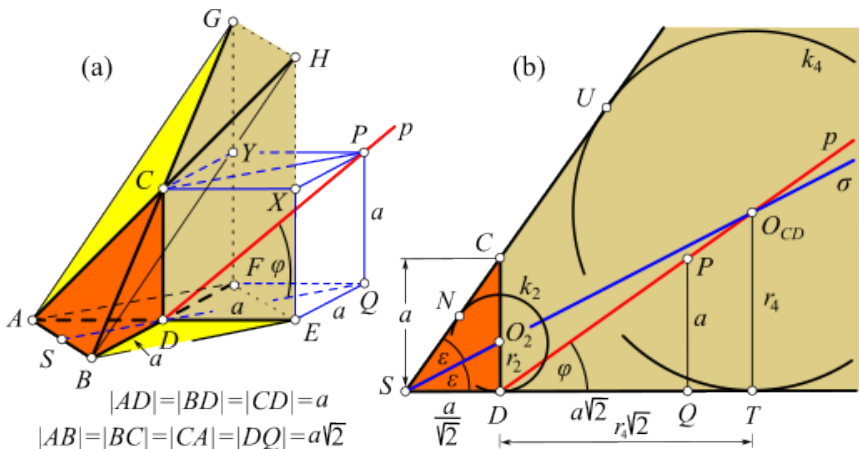
$$|CS| = \sqrt{|DS|^2 + |DC|^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}},$$

a tak

$$\cos 2\varepsilon = \frac{|DS|}{|CS|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Výsledek dosadíme do standardního vztahu pro tangens, resp. kotangens polovičního úhlu a upravíme na tvar

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$



Obr. 11 K příkladu 2: (a) situace v prostoru, (b) řez rovinou CDS

Vraťme se nyní k trojúhelníku $O_{CD}ST$. Platí

$$|ST| = |O_{CD}T| \cotg \varepsilon$$

neboli

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + r_4\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}r_4$$

a odtud

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a \doteq 1,366a. \quad (4)$$

Konstrukční řešení úlohy spočívá v narýsování obr. 11 (b) ve vhodném měřítku pro konkrétní hodnotu a . Postup snad není nutné uvádět.

Dosud jsme nezmínili kružnici $k_2(O_2; r_2)$, uvedenou na obr. 11. Kruh, který ohraničuje, je společným kolmým průmětem kulových ploch přiřpaných čtyřstěnu ke stěnám BCD a ACD . Středů těchto sfér totiž leží na průniku symetrály σ klínu $ABCD$ se symetrálami klínů $CDBE$ a $CDAF$, jež jsou kolmé k rovině CDS . Leží tedy na kolmici k rovině CDS procházející bodem $O_2 \in CD \cap \sigma$. A tak mají obě sféry poloměr

$$r_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a = a - r_4 \doteq 0,366 a \quad (5)$$

Vzhledem k symetrii čtyřstěnu má poloměr r_2 i kulová plocha přiřpaná ke stěně ABD .

Střed sféry $\mathcal{K}(O_1; r_1)$ čtyřstěnu vepsané, i střed sféry $\mathcal{K}_{ABC}(O_3; r_3)$ přiřpané k jeho stěně ABC , leží rovněž v rovině CSD . Je tedy možné analogickým postupem doplnit obrázek obr. 11 (b) o hlavní kružnice těchto sfér a určit jejich poloměry konstrukcí i výpočtem.

Provedení ponecháme čtenáři a uvedeme jen, že

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} a \doteq 0,211, \quad r_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} a = a - r_1 \doteq 0,789 a. \quad (6)$$

Závěr. Daný čtyřstěn má jednu sféru vepsanou, čtyři kulové plochy přiřpané ke stěnám a tři přiřpané při hranách AD , BD a CD . Jejich poloměry jsou dány vztahy (6), (5) a (4).

Ze základních vlastností čtyřstěnu jako prostorové analogie trojúhelníku jsme dosud neuvedli průsečík výšek. Mají jej pouze tzv. *ortocentrické čtyřstěny*, s nimiž se seznámíme příště.

Literatura

- [1] *Česká terminologická komise pro matematiku*: Názvy a značky školské matematiky. SPN, Praha, 1988.
- [2] *Horák, S.*: Mnohostěny. ŠMM 27, Mladá Fronta, Praha, 1970. Dostupné na <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>
- [3] *Ponarin, J., P.*: Elementarnaja geometrija 2. MCNMO, Moskva, 2006.
- [4] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia, Stereometrie. Prometheus, Praha, 1995.