13. ročník CPSJ

Ve dnech 18. až 21. května 2025 se v polském Szczyrku konal již 13. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ). V něm se utkali na české a slovenské straně vybraní žáci nejvýše prvních ročníků středních škol, polskou stranu pak reprezentovali vítězové finále soutěže Olimpiada Matematyczna Juniorów.

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků našich žáků především v krajských kolech kategorií A a C v 74. ročníku MO a dále následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník středních škol (kvinty osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Miriam Barešová* (5/8), G Dobruška, *Jan Bradáč* (5/8), G Boskovice, *Štěpán Sikora* (4/8), G Nad Štolou, Praha 7, *Dan Školař* (9), SOŠ a ZŠ Březová, *Michal Tollar* (5/8) a *Petr Vokřínek* (5/8), oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše. Vedoucím české delegace byli *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.* a *Mgr. Patrik Bak.*

Český reprezentační výběr

Všichni účastníci se sešli v neděli 18. května v penzionu Gronik v Szczyrku. V pondělí na ně čekala soutěž jednotlivců, kdy řešili po dobu 3,5 hodiny pět příkladů. Jejich zadání obdrželi soutěžící v mateřském jazyce, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce nebo anglicky. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev, v každém z nich bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi. Druhý den tyto týmy řešily po dobu pěti hodin soutěž družstev, kdy dostaly sadu šesti příkladů, po dvou v češtině, polštině a slovenštině. Řešení těchto úloh družstva odevzdávala vždy v jiném jazyce, přičemž vznikly všechny kombinace různých jazyků. Soutěžící si tak vyzkoušeli týmovou komunikaci, kdy svým kolegům museli objasnit zadání a poté i řešení úloh.

Při soutěži jednotlivců

Absolutními vítězi soutěže jednotlivců se stali se ziskem 21 bodů (z 25 možných) *Marek Konieczny* z Polska a *Alex Markus* ze Slovenska. Po nich se seřadilo pět českých žáků v pořadí *Štěpán Sikora*, *Miriam Barešová*, *Dan Školař*, *Jan Bradáč* a *Petr Vokřínek*. *Michal Tollar* pak obsadil dělené deváté místo.

Český tým tak zvítězil v neoficiální soutěži družstev před druhým Slovenskem a třetím Polskem. Tyto výsledky ovšem nelze brát za směrodatné, neboť polští soutěžící byli o dva roky mladší.

Podrobnější výsledky soutěže jednotlivců najdete na stránkách Matematické olympiády. Vzorová řešení (v polštině) soutěžních úloh na stránkách polských kolegů. Na závěr uvádíme zadání všech soutěžních úloh, přitom úlohy soutěže družstev uvádíme tak, jak ji obdrželi soutěžící. Za textem úlohy je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců (19. 5.)

1. Určete všechna prvočísla p, pro která lze číslo $p^3 + p^2 + p + 1$ zapsat jako součin dvou různých prvočísel. (*Slovensko*)

2. Určete všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami délek 1. (*Česko*)

3. V daném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Body D a E jsou po řadě body stran BC a AC. Uvažujme vrcholy K, L rovnostranných trojúhelníků ADK, BEL takových, že body A a L leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou BE a body B a K leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AD. Dokažte, že $|AE| + |BD| = |KL|$. (*Polsko*)

4. Na tabuli jsou na počátku napsána tři nezáporná celá čísla. V každém kroku čísla a, b, c napsaná na tabuli nahradíme hodnotami součtů $a+b$, $b+c$, $c+a$. Určete největší možný počet kroků, po kterých se na tabuli může objevit číslo 111. (*Česko*)

5. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 1$ je číslo

$$A_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} - \dots + \frac{2n-1}{3n-1}$$

větší než $\frac{1}{3}$.

Poznámka. Slabší odhady (například $A_n > 0$ pro každé n) mohou být ohodnoceny částečnými body. (*Polsko*)

Soutěž družstev (20. 5.)

1. Uvažujme následující operaci s dvojmístným číslem: Nejprve vynásobíme jeho číslice, poté vypočteme druhou mocninu jeho poslední číslice a tyto dva výsledky zapíšeme za sebou v tomto pořadí (např. pro číslo 27 spočteme 14 a 49, odkud získáme 1449). Čtyřmístné číslo nazveme *okázalé*, pokud je jeho druhá odmocnina dvojmístným číslem a operací z ní vznikne původní čtyřmístné číslo. Určete všechna okázalá čísla. (*Slovensko*)

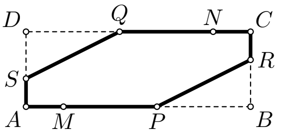
2. Pro obdélníkový list papíru $ABCD$ platí

$$|AB| : |BC| = 3 : 1.$$

Na jeho stranách AB a CD leží po řadě takové body M a N, že

$$|AM| : |AD| = |CN| : |CB| = 1 : 2.$$

List přeložíme tak, že bod D splyne s bodem M. Poté jej opět přeložíme bodem B na bod N. Vznikne šestiúhelník $APRCQS$ jako na obrázku. Dokažte, že tento šestiúhelník lze šesti přímkami rozdělit na pravoúhlé trojúhelníky.



(*Slovensko*)

3. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wśród tych punktów n punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe n pomalowano na niebiesko (każdy punkt ma dokładnie jeden kolor). Wyznacz, w zależności od n, największą dodatnią liczbę całkowitą k o następującej własności: zawsze (niezależnie od tego, które punkty wybrano i jak je pomalowano) można narysować k-kąt o czerwonych wierzchołkach oraz k-kąt o niebieskich wierzchołkach w taki sposób, aby nie miały one żadnych punktów wspólnych.

(*Slovensko*)

4. Wykaż, że pośród każdych 21 parami różnych liczb nieujemnych rzeczywistych można wskazać dwie różne liczby x, y o tej własności, że

$$20|x-y| < (x+1)(y+1).$$

(*Česko*)

5. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných reálnych čísel taká, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Nájdite najväčšie celé číslo N také, že presne N členov postupnosti je celočíselných pre nejaké reálne a_1.

(*Slovensko*)

6. Nech $n \geq 1$ je celé číslo. Postupnosť n šípok, z ktorých každá ukazuje doľava ($\leftarrow$) alebo doprava ($\rightarrow$) sa volá *zaujímavá*, ak žiadne dve šípky neukazujú na ten istý počet šípok. Určte počet všetkých zaujímavých postupností n šípok.

Príklad: Pre $n = 5$ v postupnosti $\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow\rightarrow$ sú počty šípok na ktoré ukazujú jednotlivé šípky postupne $4, 1, 2, 1, 0$. Preto táto postupnosť nie je zaujímavá (keďže počet 1 sa objavil dvakrát).

(*Polsko*)

Autorsky se na tvorbě a přípravě úloh podíleli *Pavel Calábek*, *Jaroslav Švrček*, *Patrik Bak*, *Arkadiusz Męcel* a *Łukasz Bożyk*. Příští, 14. ročník soutěže se uskuteční v květnu 2026 na Slovensku.

Pavel Calábek

Turnaj mladých fyziků 2025

Od 29. 6. do 6. 7. 2025 se ve švédském Lundu uskutečnil 38. ročník Mezinárodního turnaje mladých fyziků (International Young Physicists' Tournament, IYPT). Česká republika se může pochlubit úspěchem – *naši reprezentanti získali bronzovou medaili.*

Pokud Turnaj mladých fyziků (TMF) již znáte, můžete některé části článku přeskočit

- O Turnaji mladých fyziků
- Změny v TMF v ČR
- Příprava na IYPT 2025
- Průběh mezinárodního kola
- Závěr, výzva a pozvánka

O Turnaji mladých fyziků

Turnaj mladých fyziků je jedna z nejnáročnějších oborových soutěží,