ZPRÁVY

53. Mezinárodní matematická olympiáda

53. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se uskutečnil 4.–16. července 2011 v Mar del Plata, po 15 letech se tak soutěž vrátila na jižní polokouli, opět (a podruhé) do Argentiny. Soutěže se zúčastnilo 548 studentů ze 100 zemí pěti kontinentů. Nechyběli žádní tradiční účastníci, poprvé se IMO zúčastnila Uganda.

České družstvo sestavené na základě výsledků ústředního kola kategorie A 61. ročníku MO tvořili tito soutěžící: *Michal Buráň* z GJAK v Uherském Brodě, *Michal Kopf*, ze SG v Opavě, *Anh Dung Le* z G v Tachově, *Jan Stopka* z G v Brně, tř. kpt. Jaroše, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou, a *Josef Svoboda*, z G ve Frýdlantu nad Ostravicí. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.*, z Přírodovědecké fakulty MU v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci. Kromě Ministertva školství, mládeže a tělovýchovy se na úhradě cestovného českého družstva jednou pětinou podílel také Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu.

Jednotlivé země odeslaly v dubnu návrhy úloh, organizátoři z nich 30 vybrali a zařadili to tzv. *Shortlistu.* Vedoucí delegací a další členové jury přijeli do Argentiny již 4. července. Seznámili se s Shortlistem, během tří zasedání z něj vybrali šestici soutěžních úloh, přeložili ji do národních jazyků a připravili bodovací schéma. Autorem páté vybrané úlohy je *Josef Tkadlec*, který jako bývalý úspěšný účastník IMO (2008 bronzová medaile, 2009 stříbrná medile) je nyní studentem MFF UK v Praze. Soutěžící se spolu s pedagogickými vedoucími přiletěli do Mar del Plata 8. července a ubytovali se v Gran hotelu Provincial poblíž pláže v centru města.

Slavnostní zahájení 53. ročníku IMO proběhlo den po příjezdu všech soutěžících v místním divadle. Na programu byly uvítací projevy organizátorů a představitelů Argentiny a slavnostní nástup všech zúčastněných družstev. Novinkou byl slavnostní slib všech účastníků a pořadatelů, že se budou řídit pravidly a duchem IMO, aby tato byla čestnou a spravedlivou soutěží mezi mladými matematiky celého světa.

Vlastní soutěž se konala tradičně ve dvou soutěžních dnech (10. a 11. července) v reprezentačních sálech hotelu. Soutěžící zde každý den řešili trojici příkladů po dobu 4,5 hodiny. Následující tři dny mohli soutěžící absolvovat poznávací program Mar del Plata. Mnoho soutěžících ovšem dalo přednost hraní her, které organizátoři připravili ve třech sálech hotelu, vědomi si toho, že v období místní „zimy“ (průměrná teplota moře i vzduchu 8 °C) se z prestižního a bouřlivého přímořského letoviska stává ospalé provinční město. Žákovská řešení mezitím byla nezávisle opravena vedoucími jednotlivých týmů a koordinátory, kteří poté po dva dny diskutovali o výsledném bodovém hodnocení jednotlivých úloh. Jejich snažení bylo završeno závěrečným zasedáním, na kterém jury schválila bodové hodnocení, rozhodla o udělení medailí, čestných hodnocení a potvrdila organizátory Mezinárodní matematické olympiády v roce 2016 (Brazílie).

Závěrečný den IMO se již tradičně konalo slavnostní zakončení olympiády spojené s oficiálním předáním medailí nejlepším soutěžícím. Absolutním vítězem se s plným bodovým ziskem 42 bodů stal *Jeck Lim* ze Singapuru. Po roce opět došlo ke změně v historických tabulkách, kdy se do jejich čela dostal *Teodor von Burg* ze Srbska, který během 6 účastí na IMO v letech 2007–2012 vybojoval 4 zlaté, 1 stříbrnou a 1 bronzovou medaili. V roce 2012 bylo rozděleno 51 zlatých, 88 stříbrných, 138 bronzových medailí a 148 čestných uznání. Je potěšitelné, že všichni čeští účastníci získali některé ocenění. *Anh Dung Le* se ziskem 23 bodů obsadil 85. místo a obhájil stříbrnou medaili z 52. IMO, *Josef Svoboda* (17 bodů, 145. místo) získal medaili bronzovou a *Jan Stopka* (12 bodů, 303. místo), *Michal Buráň*, *Martin Töpfer* (oba 10 bodů, 351. místo), *Michal Kopf* (8 bodů, 399. místo) si odvezli čestná uznání za úplné řešení alespoň jedné úlohy. V pořadí jednotlivých zemí obsadil český tým (spolu s Arménií a Kostarikou) 47.–49. místo se ziskem 80 bodů.

Zájemci o podrobnější informace o průběhu 53. ročníku IMO mohou získat další informace na oficiálních stránkách 53. olympiády: http://oma.org.ar/.

Dále uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh 53. ročníku IMO. (V závorce za textem úlohy je uvedena země, která úlohu do soutěže navrhla.)

1. soutěžní den (10. 7. 2012)

1. Je dán trojúhelník ABC. Nechť J je střed kružnice připsané ke straně BC a nechť M je bod jejího dotyku s touto stranou. Dále nechť K a L značí po řadě body dotyku této kružnice s přímkami AB a AC. Průsečík přímek LM a BJ označme F a průsečík přímek KM a CJ pak G. Dále nechť S je průsečík přímek AF a BC a konečně nechť T je průsečík přímek AG a BC. Dokažte, že M je středem úsečky ST. (Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA.)

(*Řecko*)

2. Je dáno celé kladné $n \geq 3$ a kladná reálná $a_2, a_3, \ldots, a_n$ taková, že $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Dokažte, že pak platí nerovnost
$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n$.

(*Austrálie*)

3. „Hra na chytrou horákyni“ je hrou mezi dvěma hráči A a B. Pravidla hry závisejí na dvou kladných celých číslech k a n, která jsou známa oběma hráčům.

Na začátku hry zvolí hráč A celá čísla x a N, kde $1 \leq x \leq N$, a z nich prozradí (po pravdě) hráči B pouze číslo N, číslo x si nechá pro sebe. Hráč B se nyní snaží získat informace o čísle x kladením otázek hráči A. Může přitom klást pouze otázky následujícího typu: vybere libovolnou podmnožinu S kladných celých čísel (muže vybrat i množinu, kterou již zvolil v některé z předchozích otázek) a zeptá se hráče A na to, zda číslo x leží v S. Hráč B může položit libovolně mnoho takovýchto otázek. Na každou otázku musí hráč A okamžitě odpovědět, a to bud „ano“, nebo „ne“. Při odpovědích však muže hráč A lhát, dokonce libovolně mnohokrát; jediným omezením je pouze to, aby mezi každými jeho $k + 1$ za sebou následujícími odpověďmi byla alespoň jedna pravdivá. Poté, co hráč B skončí s kladením všech svých otázek, zadá nějakou, nejvýše n-prvkovou, podmnožinu X kladných celých čísel. Pokud číslo x náleží do množiny X, tak hráč B vyhrál, jinak prohrál. Dokažte:

a) Jestliže je $n \geq 2^k$, tak má hráč B vyhrávající strategii.

b) Pro každé dostatečně velké celé kladné k (tj. od jisté meze pro každé celé kladné číslo k) existuje číslo $n \geq 1{,}99^k$ takové, že neexistuje vyhrávající strategie za hráče B.

(*Kanada*)

České družstvo při zahájení 53. IMO

2. soutěžní den (11. 7. 2012)

4. Najdete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to Z$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 =$$
$$= 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$. ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.)

(*Jihoafrická republika*)

5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$.

(*Česká republika*)

6. Nalezněte všechna celá kladná čísla n, pro která existují nezáporná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že platí rovnosti

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} =$$
$$= \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(*Srbsko*)

Dále uveďme pořadí některých zemí na 53. IMO (v závorce je uveden celkový bodový zisk a dále počet zlatých, stříbrných a bronzových medailí):

1. Korea (209 b., 6-0-0), 2. Čína (195 b., 5-0-1), 3. USA (194 b., 5-1-0), 4. Rusko (177 b., 4-2-0), 5.–6. Kanada (159 b., 3-1-2), Thajsko (159 b., 3-3-0), 7. Singapur (154 b., 1-3-2), 8. Írán (151 b., 3-2-1), 9. Vietnam (148 b., 1-3-2), 10. Rumunsko (144 b., 2-3-1), 11. Indie (136 b., 2-3-0), 12.–13. KLDR (128 b., 2-1-3), Turecko (128 b., 1-3-2), 14. Tchaj-wan (127 b., 1-3-0), 15. Srbsko (126 b., 1-2-1), 16. Peru (125 b., 0-3-2), 17. Japonsko (121 b., 0-4-1), 18. Polsko (119 b., 0-2-4), 19.–21. Brazílie (116 b., 1-1-3), Bulharsko (116 b., 1-2-2) Ukrajina (116 b., 0-3-2), …47.–49. *Česká republika* (80 b., 0-1-1), …, 100. Kuvajt (0 b. 0-0-0).

Následující, 54. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční 18.–28. července 2013 v kolumbijském karibském přístavním městě Santa Marta.

Pavel Calábek