čísel. V našem článku jsme proto chtěly čtenáře seznámit alespoň s některými typy diofantovských rovnic, které se v nich vyskytují. Kromě zde uvedených diofantovských rovnic se ve zmiňovaných učebnicích objevují i další typy diofantovských rovnic a dále také například teorie řetězových zlomků a teorie kongruencí užívaná hlavně k řešení lineárních diofantovských rovnic. S těmito tématy se v současných učebnicích matematiky pro střední školy vůbec nesetkáváme. Uvědomili jsme si ovšem, že i v posledních desetiletích se s úlohami z této části matematiky může seznámit alespoň úzká skupina středoškolských studentů, kteří patří mezi řešitele matematické olympiády. Po celá desetiletí se mezi úlohami matematické olympiády tradičně objevují úlohy z elementární teorie čísel a mezi nimi také diofantovské rovnice nebo slovní úlohy, které vedou k řešení těchto rovnic.

Literatura

[1] *Fischer, J.*: Matematika pro vyšší realní školy a gymnasia, Brno, 1862.

[2] *Machovec, F.*: Algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1886.

[3] *Močník, F.*: Arithmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1875 (přeložené podle 14. vydání F. A. Horou).

[4] *Vyšín, J.*: Neurčité rovnice, Edice „Brána k vědění“, svazek 3, JČMF, Prometheus, Praha, 1949.

Několik myšlenek z Eukleidových Základů

EVA PATÁKOVÁ

Pedagogická fakulta UK, Praha

Knihy VII – IX Eukleidových Základů jsou vzhledem k dalším knihám Základů poměrně netypické. Ve většině knih základů totiž Eukleides řeší geometrickými prostředky čistě geometrickou tematiku, zatímco v knihách

VII – IX jsou to problémy dnes považované za typicky algebraické. (Jedná se o poměry, dělitelnost, prvočísla apod.) Nicméně i k této problematice přistupuje geometricky.

Článek nabízí několik podnětů k zamyšlení nad „jinou matematikou“, než na jakou jsme v dnešní době zvyklí. Nejedná se o faktografický popis jejich obsahu, ale spíše o ukázku způsobu, jak můžeme vystavět hluboké algebraické poznatky „pouze“ pomocí jazyka geometrie.

1. Geometrické nahlížení algebraických problémů

Eukleides na všechny problémy nahlížel pouze geometricky. To je ale pro dnešního čtenáře dost neobvyklé a náročné – jsme už totiž zvyklí přemýšlet jiným způsobem. Navíc díky tomu, že od doby Eukleidovy bylo objeveno velké množství matematických poznatků a zavedena některá značení (např. práce s proměnnou), jsou pro dnešního čtenáře Eukleidovy důkazy aritmetických tvrzení i zbytečně zdlouhavé. Velké množství vět, jejichž důkazy jsou v Základech relativně dlouhé, je možné s využitím algebraického myšlení a algebraického značení (proměnná, zlomky, apod.) dokázat triviálně, často by tyto důkazy zvládlo i školou povinné dítě. (Aby ale nedošlo k nedorozumění, je třeba poukázat na to, že hodně problémů z Eukleidových aritmetických knih rozhodně triviální není ani pro dnešního čtenáře.)

My musíme ale dílo uvažovat vzhledem k době, ve které vzniklo. A vzhledem k prostředkům, které byly v Eukleidově době k dispozici, jsou v Základech obsažené důkazy velice elegantní. Jak plyne z dosud napsaného, pro dnešního čtenáře nebude text knih VII – IX Základů pravděpodobně sloužit jako „učebnice“, protože většinu obsažených důkazů bychom dnes vedli jinak. Text je ale velice obohacující, protože čtenáři otevírá nové obzory a odbourává stereotypy.

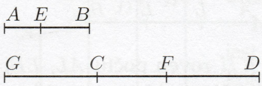
Pro celý následující text platí, že použité proměnné značí nejednotkové přirozené číslo.

1.1 Jak dokázat jednu větu o poměrech

Abychom nehovořili pouze teoreticky, uveďme konkrétní příklad (tvrzení VII., kniha VII). Pro něj je potřeba vědět, že Eukleides vnímá číslo jako délku úsečky. Nejprve si uvedeme znění věty i jejího důkazu v Servítově překladu[1] (obr. 1)[2].

VII.

Když je číslo čísla dílem, jakým odečtené odečteného, také zbytek zbytku týmž dílem bude, jakým celek celku.



Nuže buď číslo AB dílem čísla CD, jakým odečtené AE odečteného CG; pravím, že též zbytek EB zbytku FD týmž dílem jest, jakým celek AB celku CD.

Nuže jakým dílem čísla CF jest AE, budiž i EB týmž dílem čísla CF. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CG je též EB, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GF jest AB. A jakým dílem čísla CF jest AE, za týž díl čísla CD vzato též AB; jakým tedy dílem čísla GF je též AB, je také týmž dílem čísla CD; pročež $GF = CD$. Společným odečtěme CF, tedy zbývající $GC = FD$. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GC je též EB a $GC = FD$, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla FD je též EB. Avšak jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CD je též AB; tedy též zbytek EB je týmž dílem zbytku FD, jakým celek AB celku CD.

Obr. 1 Eukleidův text v Servítově překladu

Text přepsaný do dnešního jazyka

Tvrzení přepsané do moderní terminologie zní následovně: *Mějme dány dvě trojice čísel ve vztahu menšenec – menšitel – rozdíl. Pokud druhý menšenec je stejným násobkem prvního menšence jako druhý menšitel prvního menšitele, pak jsou ve stejném vztahu i jejich rozdíly.*

Pro většinu čtenářů dnes je však pravděpodobně nejsrozumitelnější následující neslovní vyjádření:

[1] Servítův překlad Eukleidových Základů (jediný kompletní přímý překlad Základů vydaný v češtině) je cca z roku 1900. Kniha Základů komentovaných Petrem Vopěnkou, na jejíž přípravě se autorka článku podílela, již není přímým překladem, ale zpřístupněním textu dnešnímu čtenáři. V druhé části knihy je otištěn právě Servítův překlad, uvedená ukázka je ze str. 109.

[2] V textu se vyskytuje chyba – ve třetím řádku důkazu zjevně mělo být CF místo CG a naopak na začátku druhého řádku druhého odstavce CG místo CF.

Nechť $a, b, c, d, e, f, k \in \mathbb{N}$. Pak platí

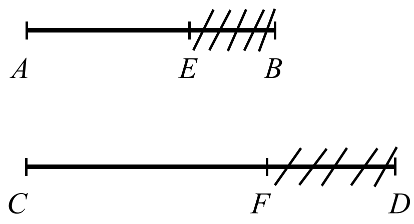
$$\left.\begin{aligned} a - b &= c \\ d - e &= f \\ d &= k \cdot a \\ e &= k \cdot b \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = k \cdot c$$

Algebraický důkaz je velmi snadný:

$$\begin{aligned} d - e &= f, \\ k \cdot a - k \cdot b &= f, \\ k \cdot (a - b) &= f, \\ k \cdot c &= f. \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na původní Eukleidův důkaz uvedený v Servítově překladu. Komentář k důkazu je však citelně zmoderniován, a to používáním slova k-násobek. (Eukleides k dispozici písmenné značení proměnné nemá.) Bez této „modernizace“ by docházelo k prodlužování a zhoršení srozumitelnosti textu – viz Servítův překlad.

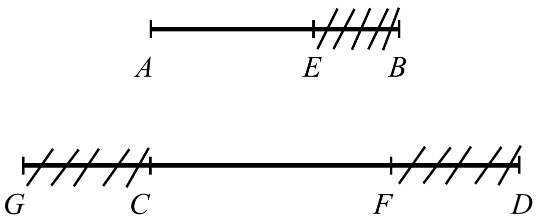
Oba rozdíly znázorníme pomocí úseček, jak je vidět na obr. 2. Od úsečky AB odečteme úsečku AE, rozdílem je úsečka EB. Stejně tak od úsečky CD odečteme úsečku CF, rozdílem je úsečka FD. (Rozdíly jsou vyznačeny šrafováním.) Přitom víme, že úsečka CD je k-násobkem úsečky AB a úsečka CF k-násobkem úsečky AE. Chceme dokázat, že i úsečka FD je k-násobkem úsečky EB.



Obr. 2 Znázornění rozdílů

Pro důkaz nemáme k dispozici vytýkání v algebraickém smyslu slova. Z tvrzení V. v knize VII však máme dokázáno, že „Když je číslo čísla dílem a jiné jiného týmž dílem, též součet obou týmž dílem bude součtu, jakým jedno jednoho.“ Neboli že pokud sečteme k-násobek jedné úsečky s k-násobkem druhé úsečky, výsledný součet bude k-násobkem součtu původních úseček.

Vyrobíme si proto úsečku, která je k-násobkem úsečky EB, a vhodně ji naneseme z bodu C na polopřímku opačnou k polopřímce CD. Na obr. 3 je tedy úsečka CG k-násobkem úsečky EB. Pak zajisté úsečka GF je k-násobkem úsečky AB, protože je součtem úsečky CG (k-násobku úsečky EB) a úsečky CF (k-násobku úsečky AE). [3]



Obr. 3 Přidání úsečky CG

Nyní víme, že úsečka GF je k-násobkem úsečky AB. Z předpokladu tvrzení však také víme, že úsečka CD je k-násobkem úsečky AB. Z toho vyplývá, že úsečka GF a úsečka CD jsou shodné. Přitom úsečka CF je oběma zmíněným úsečkám společná, tudíž musí být shodné i úsečky CG a FD. Jelikož však CG je k-násobkem úsečky EB, musí být k-násobkem úsečky EB i úsečka FD, což jsme chtěli dokázat.

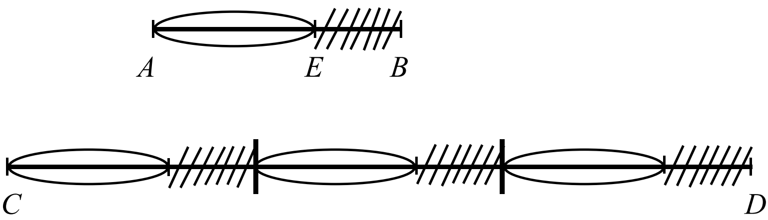
Jiný způsob důkazu zmíněné věty

Uvedený způsob důkazu samozřejmě není jediný, jak by bylo možné zmíněnou větu dokázat geometricky. Ukažme si ještě alespoň jeden geometrický důkaz.

Opět znázorníme první rozdíl pomocí úsečky AB rozdělené bodem E a druhý menšenec pomocí úsečky CD, jako je na obr. 2.

[3]Zde je opět vidět odlišnost od současné terminologie. Dnes bychom úsečku GF za použití zavedených neznámých vyjádřili jako $k \cdot c + e$, tedy jako součet objektů. Eukleides ji – aniž by zaváděl novou neznámou – označuje jen jako úsečku GF, tedy jako jediný objekt.

Rozdělme si nyní úsečku CD na k úseček shodných s úsečkou AB. [4] Z každé takto získané úsečky můžeme oddělit úsečku shodnou s úsečkou AE (obr. 4). Počet takových úseček bude zajisté roven k a součet těchto úseček je právě roven zbytku úsečky CD po oddělení k úseček shodných s AE. Zbytek úsečky CD po oddělení k-násobku úsečky AE proto bude k-násobkem úsečky EB, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 4 Jiný způsob důkazu

2. Zajímavé pojmy a vztahy

Eukleidovo chápání některých pojmů je jiné, než jak je chápeme my dnes. Zatím jsme však nenarazili na to, že v Základech se vyskytují pojmy, které se dnes už nepoužívají vůbec (např. sudosudé číslo, budou uvedeny v překladu podle Servíta). Zkusme se nyní podívat na některé zajímavosti.

2. 1 Chápání pojmu „číslo“

Už z předchozího textu plyne, že pojem číslo asi nebude u Eukleida chápán stejně jako u nás. Je zjevné, že např. záporné číslo pro Eukleida není přípustné, neboť každé číslo (v jeho pojetí tohoto slova) je pro něj znázornitelné úsečkou. Pojetí čísla, se kterým Eukleides v algebraických knihách pracuje, je takové, že číslem je pro něj jakékoli nejednotkové přirozené číslo. Jednotka má v pojetí Eukleidově zvláštní postavení, proto ji vždy diskutuje zvlášť, „číslem“ pro něj není. (Zvláštní postavení jednotky je vidět např. na nesoudělných číslech. V naší terminologii musíme říct, že jediný společný dělitel nesoudělných čísel – v rámci přirozených čísel – je jedna. Pro Eukleida neexistuje číslo, které by bylo společným dělitelem nesoudělných čísel.)

[4] Opět sice pro přehlednost textu je použito moderní značení proměnné k, Eukleides ale měl způsob, jak pracovat s proměnným množstvím úseček bez „naší“ symboliky (důkaz instruktivním příkladem).

2.2 Díl, díly

Nutnost rozlišovat mezi dílem a díly zmizela s nástupem zlomků. Je-li číslo dílem jiného čísla, je jeho dělitelem. (Dá se vyjádřit jako jedna n-tina tohoto čísla.) Je-li číslo díly jiného čísla, je jeho částí, která ale není jeho dílem. (Lze vůči většímu číslu vyjádřit pravým zlomkem, kde v čitateli v základním tvaru není jednotka.)

Toto terminologické vymezení je více vztažené ke geometrické interpretaci čísla. Sám název díl (díly) navozuje představu opravdu mechanického rozdělení čísla. Např. číslo 5 je dílem čísla 15, protože číslo 15 lze rozdělit na tři díly o velikosti 5. Zatímco číslo 10 není dílem čísla 15, protože číslo 15 na díly velikosti 10 beze zbytku rozdělit nejde. Lze ale říct, že číslo 10 je díly čísla 15, protože číslo 15 lze rozdělit na díly velikosti 5 a z těchto dílů můžeme složit číslo 10.

Je tedy zjevné, že v každé dvojici čísel je menší číslo dílem, nebo díly čísla většího. (Viz tvrzení IV. v knize VII.) Protože i když jsou čísla nesoudělná, větší z čísel lze vždy rozdělit na díly jednotkové a z nich potom složit číslo menší.

2.3 Rovinná čísla, čísla tělesová

Již je řečeno výše, že interpretace čísel jsou u Eukleida geometrické. Nejpřirozenější geometrická interpretace součinu dvou čísel je obsah obdélníka, jehož stranami jsou úsečky reprezentující daná čísla (tzv. rovinné číslo). Interpretací součinu tří čísel je pak objem kvádru, jehož hranami jsou úsečky reprezentující daná čísla. Je zjevné, že součin dvou stejných čísel neboli druhou mocninu čísla reprezentuje obsah čtverce s příslušnou stranou – a opravdu se tomuto speciálnímu rovinnému číslu říká číslo čtvercové. (Vzpomeňme si, že ještě poměrně nedávno se druhé mocnině čísla i v české terminologii říkalo „čtverec čísla“.) Analogicky třetí mocnina čísla jako speciální případ tělesového čísla byla označována jako číslo krychlové.

2.4 Využití představy rovinného čísla při násobení

Mohlo by se zdát, že pro dnešního čtenáře je sice geometrické chápání čísla krásnou ukázkou, jak přemýšlet jinak, než je zvykem, ale pro praxi to nezbytně je zbytečná komplikace. To však není pravda. Nádhernou ukázkou, kdy geometrické vnímání čísla naopak situaci výrazně zjednoduší, je představa komutativity násobení. Tu ukazuje ve svých komentářích k Základům P. Vopěnka: Máme-li dokázat, že $9 \cdot 13 = 13 \cdot 9$, je algebraická představa poměrně pracná. (Má-li vlak 9 vagónů po 13 cestujících, zjevně je počet cestujících ve vlaku $9 \cdot 13$. Abychom ukázali, že je tento počet roven také $13 \cdot 9$, musíme si např. zavést vhodné číslování cestujících. Pokud v každém vagónu cestující očíslujeme, pak je v celém vlaku cestujících označených jednotkou devět, cestujících označených dvojkou také devět, ... – neboli $13 \cdot 9$.)

Důkaz využívající geometrické chápání čísla je však výrazně snazší – důkaz, že obdélník o rozměrech 9×13 je shodný s obdélníkem 13×9, je triviální.

2.5 Čísla licholichá, sudusodá, sudolichá

Číslo sudoliché je takové číslo, které lze rozložit na součin sudého a lichého čísla. (Ostatní analogicky.) Je zjevné, že zařazení čísla do skupiny nemusí být jednoznačné. Např. číslo 12 je sudosudé ($12 = 2 \cdot 6$) i sudoliché ($12 = 4 \cdot 3$). Zde se opět ukazuje šikovnost toho, že jednotku Eukleides nepovažuje za číslo. Kdyby považoval, zjevně by každé sudé číslo muselo být sudoliché ($4 = 4 \cdot 1$).

3. Závěr

V textu bylo přiblíženo, co znamená geometrické vnímání algebraických vztahů. Celý článek vychází z algebraických knih Eukleidových Základů, a to převážně z cca 100 let starého překladu Františka Servíta – jediného[5] dosud vydaného kompletního překladu Eukleidových Základů do češtiny.

Přímý překlad Eukleidových Základů je pro dnešního čtenáře poněkud náročný na porozumění, a to hned z několika důvodů. Nejmenší překážkou – pokud chceme využít Servítův překlad – je jistá archaičnost češtiny cca z roku 1900. (Není zas tak velký problém si zvyknout na zastaralá slova – např. „jakýžto“, ani na odlišnou slovní zásobu – např. „kmenné číslo“ = prvočíslo.) Závažnějším problémem může být geometrická představa čísla – o ní bylo v článku pojednáno podrobně. Podle mého názoru nejzávažnějším problémem je pro nás ale absence matematického aparátu, který máme dnes. I jednoduché vztahy jsou popsány jinak (vzhledem k našemu způsobu myšlení mnohdy složitěji), než bychom je popsali my. (Např.: „A jakým dílem čísla CF jest AE, za týž díl čísla CD vzato též AB.“ Pouhé převedení do současné češtiny by znělo takto: „Kolikrát je CF větší než AE, tolikrát je i CD větší než AB.“ My bychom však nejspíš využili např. aparát zlomků a celou větu bychom zapsali jako $\frac{|CF|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|AB|} \in \mathbb{N}$.)

[5] O neúspěšných pokusech o překlad Základů do češtiny se lze dočíst v [1].

Zpřístupněním Eukleidových Základů v podobě, která je pro práci výrazně příjemnější a která se zároveň snaží zachovat historickou hodnotu tohoto díla, je edice Eukleidových Základů komentovaných Petrem Vopěnkou – viz Eukleides 2007, 2009, 2010, 2011. (V době psaní tohto článku byly vydány v příslušné edici knihy I – IV, V – VI, VII – IX a XI – XII, již se připravují další díly.)

Postřehy publikované v tomto článku vychází ze spolupráce autorky článku s P. Vopěnkou na vydání knih VII – IX.

Literatura

[1] *Bečvářová, M.*: *České překlady a čeští překladatelé Eukleidových Základů*. Přednáška z konference Eukleides: Základy geometrie. Plzeň, 2008. Dostupné on-line: http://www.kfi.zcu.cz/akce/2008/eukleides/becvarova.pdf [cit. 2. 2. 2012]

[2] *Euklides*: Základy. Knihy I – IV komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2007.

[3] *Euklides*: Základy. Knihy V – VI komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2009.

[4] *Euklides*: Základy. Knihy VII – IX komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2010.

[5] *Euklides*: Základy. Knihy XI – XII komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2011.

Grantová podpora

Článek vznikl za podpory grantu GAUK č. 303511.

O jedné vlastnosti permutací

MARTIN BROUŠEK

posluchač Přírodovědecké fakulty UP, Olomouc

Při studiu permutací se můžeme seznámit s mnoha zajímavými vlastnostmi, ale jen zřídka narazíme na zmínku o komutativnosti jejich skládání. Pokud se s touto speciální vlastností však setkáme, stává se to