MATEMATIKA

Diofantovské rovnice 2. stupně

LADISLAVA FRANCOVÁ – JITKA KÜHNOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

V tomto článku se budeme zabývat některými případy diofantovských rovnic 2. stupně o dvou neznámých a dále otázkou, zda se s nimi mohou nebo v minulosti mohli seznámit studenti středních škol, především gymnázií. Diofantovská rovnice 2. stupně o dvou neznámých x, y má obecný tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

kde a, b, c, d, e, f jsou daná celá čísla. Budeme se zde věnovat zejména případům, kdy $a = 0$ nebo $c = 0$. Tyto rovnice byly uvedeny v učebnicích matematiky pro gymnázia a reálky, podle kterých se vyučovalo ve druhé polovině 19. století a na počátku 20. století. Po reformě školství, která proběhla v letech 1908 až 1910, v učebnicích matematiky pro tyto školy zůstaly už jen diofantovské (původně neurčité) rovnice lineární. Ve druhé polovině 20. století se z učebnic matematiky pro střední školy i z výuky matematiky na nich takřka vytratily i lineární diofantovské rovnice.

Diofantovské rovnice 2. stupně ve starých učebnicích

Nejprve ukážeme, jakým způsobem se diofantovské rovnice 2. stupně o dvou neznámých řešily v některých učebnicích matematiky pro gymnázia a reálky ve druhé polovině 19. století. Například v učebnici [1] je uvedena následující úloha.

Úloha 1

Nalezněte celočíselná řešení x, y rovnice

$$mx + ny + pxy = k, \quad \text{kde} \quad (m, n, p, k) = 1\,,$$

kde m, n, p, k jsou daná celá čísla a symbol (m, n, p, k) označuje jejich největší společný dělitel.

Řešení. Autor postupuje tak, že z dané rovnice vyjádří

$$y = \frac{k - mx}{n + px}$$

a obě strany této rovnice vynásobí číslem p. Tím dostane

$$py = \frac{pk - pmx}{n + px} = -m + \frac{nm + pk}{n + px}\,.$$

Má-li být y celé číslo, musí $n + px$ dělit čitatele $nm + pk$. Položíme-li

$$mn + pk = AB$$

tak, aby $A = px + n$, tj. $x = \frac{A-n}{p}$ bylo celé číslo. Dostaneme tak

$$py = -m + \frac{AB}{px + n}\,, \quad \text{tj.} \quad y = \frac{B - m}{p}\,.$$

Jestliže p dělí $B - m$, je i y celé číslo.

Tento postup se v [1] používá při řešení následující úlohy.

Úloha 2

V množině všech přirozených čísel řešte rovnici

$$2x + 3y + 5xy = 42\,.$$

Řešení. Protože $(2, 3, 5, 42) = 1$, je rovnice řešitelná. Z dané rovnice máme

$$y = \frac{42 - 2x}{3 + 5x}\,.$$

Po vynásobení obou stran rovnice číslem 5 dostaneme

$$5y = \frac{210 - 10x}{3 + 5x} = -2 + \frac{216}{3 + 5x}\,.$$

Aby x, y byla celá čísla, musíme čitatele 216 vyjádřit jako součin $A \cdot B$ tak, že $5 \mid (A - 3)$ a zároveň $5 \mid (B - 2)$. Ačkoliv je číslo 216 dělitelné čísly $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216$, pouze pro dělitele $8, 12, 18, 27$ platí, že $216 = 8 \cdot 27 = 12 \cdot 18$ a že

$$(5 \mid (8-3)) \wedge (5 \mid (27-2)) \wedge (5 \mid (18-3)) \wedge (5 \mid (12-2)) .$$

- Nechť $A = 8,\ B = 27$. Pak

$$\frac{216}{3+5x} = \frac{8 \cdot 27}{3+5x} = 27 \cdot \frac{8}{3+5x}.$$

  Položíme-li $8 = 3 + 5x$, máme $x = 1$ a protože $5y = -2 + 27 = 25$, je $y = 5$.

- Nechť $A = 18,\ B = 12$. Pak

$$\frac{216}{3+5x} = 12 \cdot \frac{18}{3+5x}.$$

  Položíme-li $18 = 3 + 5x$, je $x = 3$. Z rovnice $5y = -2 + 12 = 10$ máme $y = 2$.

Víc než dvě uvedená přirozená řešení v tomto případě neexistují.

V současné době je obvyklejší následující způsob řešení dané rovnice. Nejprve ji vynásobíme číslem 5 a dostaneme tak rovnici

$$25xy + 10x + 15y = 210\,,$$

kterou potom postupným vytýkáním upravíme na tvar

$$(5x+3)(5y+2) = 216\,.$$

Nyní musí být čísla $5x + 3$ a $5y + 2$ sdruženými děliteli čísla 216. Všechny možnosti vypíšeme do následující tabulky, z níž vidíme, že rovnice má jen dvě přirozená řešení.

$5x+3$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	27	36	54	72	108	216
$5y+2$	216	108	72	54	36	27	24	18	12	9	8	6	4	3	2	1
x	–	–	0	–	–	1	–	–	3	–	–	–	–	–	21	–
y	–	–	14	–	–	5	–	–	2	–	–	–	–	–	0	–

Podobně jako v učebnici [1] se tyto rovnice řeší také v učebnici [2], v níž se navíc můžeme setkat s rovnicí

$$ky = a + bx + cx^2 ,$$

kterou autor řeší pomocí kvadratických zbytků. Zkoumáme-li zbytky, ktebreak ré dostaneme po dělení druhých mocnin libovolných celých čísel celým číslem m, zjistíme, že pouze některá čísla z těch, která jsou menší než m, se nacházejí mezi těmito zbytky. Dělíme-li např. číslem $m = 8$ kteroukoli druhou mocninu celého čísla, zjistíme, že zbytkem budou pouze čísla $0, 1$ nebo 4. Takové zbytky pak nazýváme *kvadratické zbytky.*

Označíme-li kvadratický zbytek pro číslo m písmenem a, pak musí existovat celé číslo x tak, že $m \mid (x^2 - a)$. Můžeme sestrojit tabulku kvadratických zbytků pro čísla $m = 3, 4, \ldots, 13$

číslo m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
kvadr. zbytek	1	0;1	1;4	1;3;4	1;2;4	0;1;4	0;1;4;7	1;4;5;6;9	1;3;4;5;9	0;1;4;9	1;3;4;9;10;12

Chceme-li např. vyřešit rovnici $y^2 = 7x + 3$ tak, aby x, y byla celá čísla, vyjádříme x ve tvaru

$$x = \frac{y^2 - 3}{7} .$$

Protože se ovšem číslo 3 nevyskytuje mezi kvadratickými zbytky pro číslo 7 (viz tabulka), neexistuje žádné takové celé číslo x pro jakoukoli celočíselnou hodnotu y.

Úloha 3

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$ky = a + bx + cx^2.$$

Řešení. Vynásobíme-li obě strany dané rovnice číslem $4c$, dostaneme

$$4cky = 4ac + 4bcx + 4c^2x^2 .$$

Jestliže k pravé straně poslední rovnice přičteme b^2 a zároveň b^2 odečteme, máme

$$4cky = 4c^2x^2 + 4bcx + b^2 + 4ac - b^2 , \quad \text{tj.} \quad 4cky = (2cx + b)^2 - (b^2 - 4ac) .$$

Položíme-li $m = 4ck$, $z = 2cx + b$, $w = b^2 - 4ac$, je $my = z^2 - w$, tedy

$$y = \frac{z^2 - w}{m}. \qquad (1)$$

Má-li být $y \in \mathbb{Z}$, je nutné, aby $m \mid (z^2 - w)$, neboli jinak řečeno, aby w byl kvadratický zbytek pro číslo m. V kladném případě pak z čísel menších než m vyhledáme právě taková, pro která po dosazení za z do (1) dostaneme číslo dělitelné číslem m.
Pro tuto hodnotu z pak ze vztahu $z = 2cx + b$ určíme x tak, aby podíl $(x - b)/2c$ byl celé číslo.

Tento postup si ukážeme v úloze:

Úloha 4

V oboru celých čísel nalezněte řešení rovnice

$$2y = 3 - 5x + 2x^2.$$

Řešení. Obě strany rovnice vynásobíme číslem 8 a dostaneme rovnici

$$16y = 24 - 40x + 16x^2\,,$$

kterou ještě upravíme na tvar

$$16y = 16x^2 - 40x + 25 + 24 - 25\,, \quad \text{tj.} \quad 16y = (4x - 5)^2 - 1\,.$$

Položíme-li

$$4x - 5 = z\,, \qquad (2)$$

máme

$$y = \frac{z^2 - 1}{16}\,. \qquad (3)$$

Protože pro čísla $z = 7, 9, 15$ opravdu $16 \mid (z^2 - 1)$, je číslo 1 kvadratickým zbytkem pro číslo 16. Ze vztahu (2) pak pro $x = (z + 5)/4$ dostaneme celé číslo pouze pro $z = 7$ a $z = 15$, a to $x = 3$ a $x = 5$. Ze vztahu (3) pak je $y = 3$ a $y = 14$.

Je ovšem zřejmé, že i jiná čísla větší než 16 mají tu vlastnost, že dosadíme-li je za z, v (2), (3) dostaneme celočíselné hodnoty x, y. Položíme-li totiž v (2), (3)

$$z = 7 + 16\,k, \quad \text{resp.} \quad z = 15 + 16\,l\,,$$

dostaneme $x = 3 + 4\,k$, resp. $x = 5 + 4\,l$ a $y = 3 + 14\,k + 16\,k^2$, resp. $y = 14 + 30\,l + 16\,l^2$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Tedy např. pro $z = 23$, resp. $z = 31$ (tj. $k = l = 1$) máme

$$(x, y) \in \{(7; 33), (9; 60)\}$$

Všimneme si ještě, jak se v učebnici [3] řeší diofantovské rovnice 2. stupně obecnějšího tvaru.

Úloha 5

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0,\ (a, b, c, d) = 1\,.$$

Řešení. Z dané rovnice vyjádříme

$$y = \frac{-ax^2 - cx - e}{bx + d} = mx + n + \frac{p}{bx + d}.$$

Jsou-li m, n, p zlomky, vynásobíme celý výraz nejmenším společným násobkem jejich jmenovatelů. Nová rovnice pak bude mít tvar

$$Ay = Bx + C + \frac{D}{bx + d}\,.$$

Mají-li být x, y celá čísla, musí $(bx + d) \mid D$. Nalezneme tedy všechny dělitele čísla D a za x vezmeme taková celá čísla, pro která $(bx + d) \mid D$. Z nich pak vybereme ta, pro která je $y \in Z$.

Ukážeme to při řešení úlohy.

Úloha 6

V kladných celých číslech řešte rovnici

$$2x^2 + 3xy - 4x - 2y - 20 = 0\,.$$

Řešení. Vyjádříme-li z dané rovnice y, máme

$$y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{196}{9(3x - 2)}\,,\ \text{ tj. } 9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x - 2}\,.$$

Položíme-li postupně

$$3x - 2 = 1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 14;\ 28;\ 49;\ 98;\ 196\,,$$

máme

$$x = 1;\ \frac{3}{4};\ 2;\ 3;\ \frac{16}{3};\ 10;\ 17;\ \frac{100}{3};\ 66\,.$$

Ve výrazu

$$\frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2}$$

je pro každé kladné celé číslo x jmenovatel kladný. Má-li proto být kladný čitatel, můžeme za x dosadit pouze taková čísla, která jsou nejvýše rovna číslu 5. Řešeními dané rovnice jsou $(x, y, z) \in \{(1; 2; 3), (22; 5; 2)\}$.

Podobně se tyto rovnice řeší také v učebnici [2].

Diofantovské rovnice 2. stupně v Matematické olympiádě (MO)

Jak již bylo výše uvedeno, ve druhé polovině 20. století se diofantovské rovnice 2. stupně v učebnicích matematiky pro střední školy neobjevují, ale i v této době se s nimi můžeme setkat mezi úlohami MO pro střední školy, a dokonce i pro základní školy. Uvedeme některé z těchto úloh a jejich řešení navržená autory úloh.

V 17. ročníku MO se objevila úloha C–I–3.

Úloha 7

Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají současně tyto vlastnosti:

a) *délky stran v centimetrech jsou celá čísla;*

b) *obvod trojúhelníku v cm je roven obsahu trojúhelníku v cm^2.*

Řešení. Označíme-li délky odvěsen a, b a délku přepony c, dostaneme podle zadání úlohy rovnici

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c\,, \quad \text{zároveň platí} \quad a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Vyloučením c ze soustavy těchto dvou rovnic dostaneme rovnici

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0,$$

protože $a > 0$, $b > 0$, musí platit

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0.$$

Tím dostaneme diofantovskou rovnici 2. stupně, kterou upravíme na tvar

$$(a-4)(b-4)=8.$$

Čísla $a-4$ a $b-4$ jsou sdružení dělitelé čísla 8. Všechny možnosti sestavíme do tabulky.

$a-4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$b-4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
a	5	6	8	12	3	2	0	-4
b	12	8	6	5	-4	0	2	3
c	13	10	10	13	–	–	–	–

Závěr. Úloha má dvě řešení, a to $(a,b,c) \equiv (5;12;13)$ a $(a,b,c)=(6;8;10)$ v centimetrech.

Podobný charakter má i úloha C–I–2 ze 34. ročníku MO.

Úloha 8

Určete rozměry pravidelných čtyřbokých hranolů těchto vlastností:

1) *délky jeho hran jsou vyjádřeny celými čísly,*
2) *velikost objemu hranolu a velikost povrchu hranolu jsou vyjádřeny týmž číslem.*

Řešení. Označíme-li velikost strany čtvercové podstavy hranolu a a výšku hranolu b, dostaneme rovnici

$$a^2b=2a^2+4ab\,,\quad \text{kterou upravíme do tvaru}\quad (a-4)(b-2)=8\,.$$

Z této rovnice stejným způsobem jako u předchozí úlohy dostaneme čtyři řešení $(a,b)=(5;10)$, $(6;6)$, $(8;4)$ i $(12;3)$.

V 51. ročníku MO se objevila úloha C–I–4.

Úloha 9

Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, *jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel.*

Řešení. Označme v vzdálenost v kilometrech, kterou Josef ujel na kole, a r jeho rychlost v km/h. Ze zadání úlohy pak dostaneme rovnici

$$\frac{60-v}{50}+\frac{v}{r}=\frac{3}{2}, \quad \text{kterou upravíme do tvaru} \quad (50-r)(v+15)=750\,.$$

Jelikož vzdálenost v je kladné celé číslo menší než 60, tak pro číslo $v+15$ platí $15 < v+15 < 75$. Zároveň je číslo $v+15$ dělitelem čísla 750. Tudíž máme pro číslo $v+15$ jen tři možnosti, a to 25, 30 a 50. Tedy vzdálenost v může být 10, 15 nebo 35 km. Tomu odpovídají pro rychlost r možnosti 20, 25 nebo 35 km/h.

Josef jel na kole $\frac{v}{r}$ hodin.

Závěr. Úloha má tři řešení, Josef jel na kole buď 30, 36, nebo 60 minut.

Úlohy stejného typu se objevují i v matematické olympiádě pro základní školy. Např. v 39. ročníku MO můžeme nalézt následující úlohy Z8–I–6 a Z8–II–1.

Úloha 10

Najděte všechna kladná celá čísla a, b, pro něž platí

$$ab+a+b=1989\,.$$

Řešení. Při řešení se doporučuje upravit rovnici do tvaru

$$(a+1)(b+1)=1990$$

a číslo 1 990 rozložit na součin dvou činitelů větších než 1. Všechny možnosti zapíšeme do tabulky:

$a+1$	2	5	10	199	398	995
$b+1$	995	398	199	10	5	2
a	1	4	9	198	397	994
b	994	397	198	9	4	1

Tím v posledních dvou řádcích tabulky dostáváme všechna řešení úlohy.

Druhou možností, jak tuto úlohu řešit, je převést danou rovnici do tvaru

$$a = \frac{1989 - b}{b + 1}$$

a pravou stranu dále upravit takto

$$a = \frac{1990}{b + 1} - 1.$$

Nyní musí být $b + 1$ dělitelem čísla 1 990 větším než 1. Další postup je potom stejný jako u předchozího řešení.

Úloha 11

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Zvětšíme-li jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Řešení. Jestliže délky stran daného obdélníku označíme a, b, dostaneme neurčitou rovnici

$$(a + 4)(b - 5) = 2ab.$$

Tuto rovnici můžeme upravit do tvaru

$$(a - 4)(b + 5) = -40$$

a číslo -40 rozložit na součin dvou činitelů. Nemusíme ovšem uvažovat všechny rozklady čísla -40, protože z podmínky $a > 0$ a $b > 0$ plyne $a - 4 > -4$ a $b + 5 > 5$. Tomu vyhovují jen dvě možnosti $a - 4 = -2$ a $b + 5 = 20$ nebo $a - 4 = -1$ a $b + 5 = 40$. Tudíž má úloha dvě řešení, strany daného obdélníku mají délky 2 a 15 nebo 3 a 35.

Druhou možností je upravit rovnici

$$(a + 4)(b - 5) = 2ab \quad \text{do tvaru} \qquad a = 4 - \frac{40}{b + 5}\,.$$

Proto musí $b + 5$ dělit číslo 40 a zároveň $b + 5 > 5$. Tudíž $b + 5 = 8,\ 10,\ 20,\ 40$ a $b = 3,\ 5,\ 15,\ 35$. Jelikož $a > 0$, tak z těchto čtyř možností vyhovuje jen $b = 15$ nebo $b = 35$.

Při studiu starých učebnic matematiky pro gymnázia a reálky nás velice překvapilo, jak obsáhle se v nich vykládají některé části elementární teorie čísel. V našem článku jsme proto chtěly čtenáře seznámit alespoň s některými typy diofantovských rovnic, které se v nich vyskytují. Kromě zde uvedených diofantovských rovnic se ve zmiňovaných učebnicích objevují i další typy diofantovských rovnic a dále také například teorie řetězových zlomků a teorie kongruencí užívaná hlavně k řešení lineárních diofantovských rovnic. S těmito tématy se v současných učebnicích matematiky pro střední školy vůbec nesetkáváme. Uvědomili jsme si ovšem, že i v posledních desetiletích se s úlohami z této části matematiky může seznámit alespoň úzká skupina středoškolských studentů, kteří patří mezi řešitele matematické olympiády. Po celá desetiletí se mezi úlohami matematické olympiády tradičně objevují úlohy z elementární teorie čísel a mezi nimi také diofantovské rovnice nebo slovní úlohy, které vedou k řešení těchto rovnic.

Literatura

[1] *Fischer, J.*: Matematika pro vyšší realní školy a gymnasia, Brno, 1862.

[2] *Machovec, F.*: Algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1886.

[3] *Močník, F.*: Arithmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1875 (přeložené podle 14. vydání F. A. Horou).

[4] *Vyšín, J.*: Neurčité rovnice, Edice „Brána k vědění“, svazek 3, JČMF, Prometheus, Praha, 1949.

Několik myšlenek z Eukleidových Základů

EVA PATÁKOVÁ

Pedagogická fakulta UK, Praha

Knihy VII – IX Eukleidových Základů jsou vzhledem k dalším knihám Základů poměrně netypické. Ve většině knih základů totiž Eukleides řeší geometrickými prostředky čistě geometrickou tematiku, zatímco v knihách

VII – IX jsou to problémy dnes považované za typicky algebraické. (Jedná se o poměry, dělitelnost, prvočísla apod.) Nicméně i k této problematice přistupuje geometricky.

Článek nabízí několik podnětů k zamyšlení nad „jinou matematikou“, než na jakou jsme v dnešní době zvyklí. Nejedná se o faktografický popis jejich obsahu, ale spíše o ukázku způsobu, jak můžeme vystavět hluboké algebraické poznatky „pouze“ pomocí jazyka geometrie.

1. Geometrické nahlížení algebraických problémů

Eukleides na všechny problémy nahlížel pouze geometricky. To je ale pro dnešního čtenáře dost neobvyklé a náročné – jsme už totiž zvyklí přemýšlet jiným způsobem. Navíc díky tomu, že od doby Eukleidovy bylo objeveno velké množství matematických poznatků a zavedena některá značení (např. práce s proměnnou), jsou pro dnešního čtenáře Eukleidovy důkazy aritmetických tvrzení i zbytečně zdlouhavé. Velké množství vět, jejichž důkazy jsou v Základech relativně dlouhé, je možné s využitím algebraického myšlení a algebraického značení (proměnná, zlomky, apod.) dokázat triviálně, často by tyto důkazy zvládlo i školou povinné dítě. (Aby ale nedošlo k nedorozumění, je třeba poukázat na to, že hodně problémů z Eukleidových aritmetických knih rozhodně triviální není ani pro dnešního čtenáře.)

My musíme ale dílo uvažovat vzhledem k době, ve které vzniklo. A vzhledem k prostředkům, které byly v Eukleidově době k dispozici, jsou v Základech obsažené důkazy velice elegantní. Jak plyne z dosud napsaného, pro dnešního čtenáře nebude text knih VII – IX Základů pravděpodobně sloužit jako „učebnice“, protože většinu obsažených důkazů bychom dnes vedli jinak. Text je ale velice obohacující, protože čtenáři otevírá nové obzory a odbourává stereotypy.

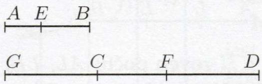
Pro celý následující text platí, že použité proměnné značí nejednotkové přirozené číslo.

1.1 Jak dokázat jednu větu o poměrech

Abychom nehovořili pouze teoreticky, uveďme konkrétní příklad (tvrzení VII., kniha VII). Pro něj je potřeba vědět, že Eukleides vnímá číslo jako délku úsečky. Nejprve si uvedeme znění věty i jejího důkazu v Servítově překladu[1] (obr. 1)[2].

VII.

Když je číslo čísla dílem, jakým odečtené odečteného, také zbytek zbytku týmž dílem bude, jakým celek celku.



Nuže buď číslo AB dílem čísla CD, jakým odečtené AE odečteného CG; pravím, že též zbytek EB zbytku FD týmž dílem jest, jakým celek AB celku CD.

Nuže jakým dílem čísla CF jest AE, budiž i EB týmž dílem čísla CF. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CG je též EB, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GF jest AB. A jakým dílem čísla CF jest AE, za týž díl čísla CD vzato též AB; jakým tedy dílem čísla GF je též AB, je také týmž dílem čísla CD; pročež $GF = CD$. Společným odečtěme CF, tedy zbývající $GC = FD$. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GC je též EB a $GC = FD$, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla FD je též EB. Avšak jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CD je též AB; tedy též zbytek EB je týmž dílem zbytku FD, jakým celek AB celku CD.

Obr. 1 Eukleidův text v Servítově překladu

Text přepsaný do dnešního jazyka

Tvrzení přepsané do moderní terminologie zní následovně: *Mějme dány dvě trojice čísel ve vztahu menšenec – menšitel – rozdíl. Pokud druhý menšenec je stejným násobkem prvního menšence jako druhý menšitel prvního menšitele, pak jsou ve stejném vztahu i jejich rozdíly.*

Pro většinu čtenářů dnes je však pravděpodobně nejsrozumitelnější následující neslovní vyjádření:

---

[1] Servítův překlad Eukleidových Základů (jediný kompletní přímý překlad Základů vydaný v češtině) je cca z roku 1900. Kniha Základů komentovaných Petrem Vopěnkou, na jejíž přípravě se autorka článku podílela, již není přímým překladem, ale zpřístupněním textu dnešnímu čtenáři. V druhé části knihy je otištěn právě Servítův překlad, uvedená ukázka je ze str. 109.

[2] V textu se vyskytuje chyba – ve třetím řádku důkazu zjevně mělo být CF místo CG a naopak na začátku druhého řádku druhého odstavce CG místo CF.

Nechť $a, b, c, d, e, f, k \in \mathbb{N}$. Pak platí

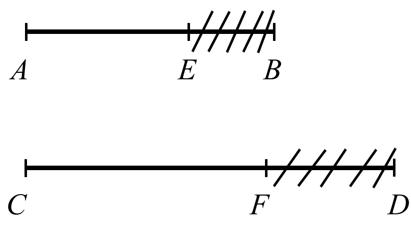
$$\left.\begin{aligned} a - b &= c \\ d - e &= f \\ d &= k \cdot a \\ e &= k \cdot b \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = k \cdot c$$

Algebraický důkaz je velmi snadný:

$$\begin{aligned} d - e &= f, \\ k \cdot a - k \cdot b &= f, \\ k \cdot (a - b) &= f, \\ k \cdot c &= f. \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na původní Eukleidův důkaz uvedený v Servítově překladu. Komentář k důkazu je však citelně zmoderniován, a to používáním slova k-násobek. (Eukleides k dispozici písmenné značení proměnné nemá.) Bez této „modernizace“ by docházelo k prodlužování a zhoršení srozumitelnosti textu – viz Servítův překlad.

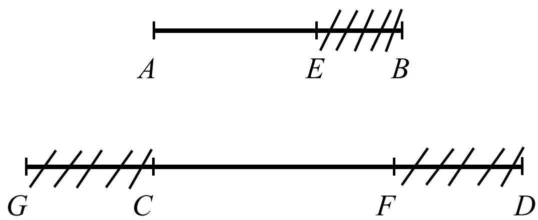
Oba rozdíly znázorníme pomocí úseček, jak je vidět na obr. 2. Od úsečky AB odečteme úsečku AE, rozdílem je úsečka EB. Stejně tak od úsečky CD odečteme úsečku CF, rozdílem je úsečka FD. (Rozdíly jsou vyznačeny šrafováním.) Přitom víme, že úsečka CD je k-násobkem úsečky AB a úsečka CF k-násobkem úsečky AE. Chceme dokázat, že i úsečka FD je k-násobkem úsečky EB.



Obr. 2 Znázornění rozdílů

Pro důkaz nemáme k dispozici vytýkání v algebraickém smyslu slova. Z tvrzení V. v knize VII však máme dokázáno, že „Když je číslo čísla dílem a jiné jiného týmž dílem, též součet obou týmž dílem bude součtu, jakým jedno jednoho.“ Neboli že pokud sečteme k-násobek jedné úsečky s k-násobkem druhé úsečky, výsledný součet bude k-násobkem součtu původních úseček.

Vyrobíme si proto úsečku, která je k-násobkem úsečky EB, a vhodně ji naneseme z bodu C na polopřímku opačnou k polopřímce CD. Na obr. 3 je tedy úsečka CG k-násobkem úsečky EB. Pak zajisté úsečka GF je k-násobkem úsečky AB, protože je součtem úsečky CG (k-násobku úsečky EB) a úsečky CF (k-násobku úsečky AE). [3]



Obr. 3 Přidání úsečky CG

Nyní víme, že úsečka GF je k-násobkem úsečky AB. Z předpokladu tvrzení však také víme, že úsečka CD je k-násobkem úsečky AB. Z toho vyplývá, že úsečka GF a úsečka CD jsou shodné. Přitom úsečka CF je oběma zmíněným úsečkám společná, tudíž musí být shodné i úsečky CG a FD. Jelikož však CG je k-násobkem úsečky EB, musí být k-násobkem úsečky EB i úsečka FD, což jsme chtěli dokázat.

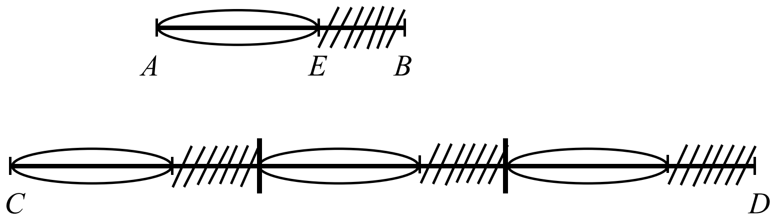
Jiný způsob důkazu zmíněné věty

Uvedený způsob důkazu samozřejmě není jediný, jak by bylo možné zmíněnou větu dokázat geometricky. Ukažme si ještě alespoň jeden geometrický důkaz.

Opět znázorníme první rozdíl pomocí úsečky AB rozdělené bodem E a druhý menšenec pomocí úsečky CD, jako je na obr. 2.

[3] Zde je opět vidět odlišnost od současné terminologie. Dnes bychom úsečku GF za použití zavedených neznámých vyjádřili jako $k \cdot c + e$, tedy jako součet objektů. Eukleides ji – aniž by zaváděl novou neznámou – označuje jen jako úsečku GF, tedy jako jediný objekt.

Rozdělme si nyní úsečku CD na k úseček shodných s úsečkou AB. [4] Z každé takto získané úsečky můžeme oddělit úsečku shodnou s úsečkou AE (obr. 4). Počet takových úseček bude zajisté roven k a součet těchto úseček je právě roven zbytku úsečky CD po oddělení k úseček shodných s AE. Zbytek úsečky CD po oddělení k-násobku úsečky AE proto bude k-násobkem úsečky EB, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 4 Jiný způsob důkazu

2. Zajímavé pojmy a vztahy

Eukleidovo chápání některých pojmů je jiné, než jak je chápeme my dnes. Zatím jsme však nenarazili na to, že v Základech se vyskytují pojmy, které se dnes už nepoužívají vůbec (např. sudosudé číslo, budou uvedeny v překladu podle Servíta). Zkusme se nyní podívat na některé zajímavosti.

2. 1 Chápání pojmu „číslo“

Už z předchozího textu plyne, že pojem číslo asi nebude u Eukleida chápán stejně jako u nás. Je zjevné, že např. záporné číslo pro Eukleida není přípustné, neboť každé číslo (v jeho pojetí tohoto slova) je pro něj znázornitelné úsečkou. Pojetí čísla, se kterým Eukleides v algebraických knihách pracuje, je takové, že číslem je pro něj jakékoli nejednotkové přirozené číslo. Jednotka má v pojetí Eukleidově zvláštní postavení, proto ji vždy diskutuje zvlášť, „číslem“ pro něj není. (Zvláštní postavení jednotky je vidět např. na nesoudělných číslech. V naší terminologii musíme říct, že jediný společný dělitel nesoudělných čísel – v rámci přirozených čísel – je jedna. Pro Eukleida neexistuje číslo, které by bylo společným dělitelem nesoudělných čísel.)

[4] Opět sice pro přehlednost textu je použito moderní značení proměnné k, Eukleides ale měl způsob, jak pracovat s proměnným množstvím úseček bez „naší“ symboliky (důkaz instruktivním příkladem).

2.2 Díl, díly

Nutnost rozlišovat mezi dílem a díly zmizela s nástupem zlomků. Je-li číslo dílem jiného čísla, je jeho dělitelem. (Dá se vyjádřit jako jedna n-tina tohoto čísla.) Je-li číslo díly jiného čísla, je jeho částí, která ale není jeho dílem. (Lze vůči většímu číslu vyjádřit pravým zlomkem, kde v čitateli v základním tvaru není jednotka.)

Toto terminologické vymezení je více vztažené ke geometrické interpretaci čísla. Sám název díl (díly) navozuje představu opravdu mechanického rozdělení čísla. Např. číslo 5 je dílem čísla 15, protože číslo 15 lze rozdělit na tři díly o velikosti 5. Zatímco číslo 10 není dílem čísla 15, protože číslo 15 na díly velikosti 10 beze zbytku rozdělit nejde. Lze ale říct, že číslo 10 je díly čísla 15, protože číslo 15 lze rozdělit na díly velikosti 5 a z těchto dílů můžeme složit číslo 10.

Je tedy zjevné, že v každé dvojici čísel je menší číslo dílem, nebo díly čísla většího. (Viz tvrzení IV. v knize VII.) Protože i když jsou čísla nesoudělná, větší z čísel lze vždy rozdělit na díly jednotkové a z nich potom složit číslo menší.

2.3 Rovinná čísla, čísla tělesová

Již je řečeno výše, že interpretace čísel jsou u Eukleida geometrické. Nejpřirozenější geometrická interpretace součinu dvou čísel je obsah obdélníka, jehož stranami jsou úsečky reprezentující daná čísla (tzv. rovinné číslo). Interpretací součinu tří čísel je pak objem kvádru, jehož hranami jsou úsečky reprezentující daná čísla. Je zjevné, že součin dvou stejných čísel neboli druhou mocninu čísla reprezentuje obsah čtverce s příslušnou stranou – a opravdu se tomuto speciálnímu rovinnému číslu říká číslo čtvercové. (Vzpomeňme si, že ještě poměrně nedávno se druhé mocnině čísla i v české terminologii říkalo „čtverec čísla“.) Analogicky třetí mocnina čísla jako speciální případ tělesového čísla byla označována jako číslo krychlové.

2.4 Využití představy rovinného čísla při násobení

Mohlo by se zdát, že pro dnešního čtenáře je sice geometrické chápání čísla krásnou ukázkou, jak přemýšlet jinak, než je zvykem, ale pro praxi to nezbytně je zbytečná komplikace. To však není pravda. Nádhernou ukázkou, kdy geometrické vnímání čísla naopak situaci výrazně zjednoduší, je představa komutativity násobení. Tu ukazuje ve svých komentářích k Základům P. Vopěnka: Máme-li dokázat, že $9 \cdot 13 = 13 \cdot 9$, je algebraická představa poměrně pracná. (Má-li vlak 9 vagónů po 13 cestujících, zjevně je počet cestujících ve vlaku $9 \cdot 13$. Abychom ukázali, že je tento počet roven také $13 \cdot 9$, musíme si např. zavést vhodné číslování cestujících. Pokud v každém vagónu cestující očíslujeme, pak je v celém vlaku cestujících označených jednotkou devět, cestujících označených dvojkou také devět, ... – neboli $13 \cdot 9$.)

Důkaz využívající geometrické chápání čísla je však výrazně snazší – důkaz, že obdélník o rozměrech 9×13 je shodný s obdélníkem 13×9, je triviální.

2.5 Čísla licholichá, sudusodá, sudolichá

Číslo sudoliché je takové číslo, které lze rozložit na součin sudého a lichého čísla. (Ostatní analogicky.) Je zjevné, že zařazení čísla do skupiny nemusí být jednoznačné. Např. číslo 12 je sudosudé ($12 = 2 \cdot 6$) i sudoliché ($12 = 4 \cdot 3$). Zde se opět ukazuje šikovnost toho, že jednotku Eukleides nepovažuje za číslo. Kdyby považoval, zjevně by každé sudé číslo muselo být sudoliché ($4 = 4 \cdot 1$).

3. Závěr

V textu bylo přiblíženo, co znamená geometrické vnímání algebraických vztahů. Celý článek vychází z algebraických knih Eukleidových Základů, a to převážně z cca 100 let starého překladu Františka Servíta – jediného[5] dosud vydaného kompletního překladu Eukleidových Základů do češtiny.

Přímý překlad Eukleidových Základů je pro dnešního čtenáře poněkud náročný na porozumění, a to hned z několika důvodů. Nejmenší překážkou – pokud chceme využít Servítův překlad – je jistá archaičnost češtiny cca z roku 1900. (Není zas tak velký problém si zvyknout na zastaralá slova – např. „jakýžto", ani na odlišnou slovní zásobu – např. „kmenné číslo" = prvočíslo.) Závažnějším problémem může být geometrická představa čísla – o ní bylo v článku pojednáno podrobně. Podle mého názoru nejzávažnějším problémem je pro nás ale absence matematického aparátu, který máme dnes. I jednoduché vztahy jsou popsány jinak (vzhledem k našemu způsobu myšlení mnohdy složitěji), než bychom je popsali my. (Např.: „A jakým dílem čísla CF jest AE, za týž díl čísla CD vzato též AB." Pouhé převedení do současné češtiny by znělo takto: „Kolikrát je CF větší než AE, tolikrát je i CD větší než AB." My bychom však nejspíš využili např. aparát zlomků a celou větu bychom zapsali jako $\frac{|CF|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|AB|} \in \mathbb{N}$.)

[5] O neúspěšných pokusech o překlad Základů do češtiny se lze dočíst v [1].

Zpřístupněním Eukleidových Základů v podobě, která je pro práci výrazně příjemnější a která se zároveň snaží zachovat historickou hodnotu tohoto díla, je edice Eukleidových Základů komentovaných Petrem Vopěnkou – viz Eukleides 2007, 2009, 2010, 2011. (V době psaní tohto článku byly vydány v příslušné edici knihy I – IV, V – VI, VII – IX a XI – XII, již se připravují další díly.)

Postřehy publikované v tomto článku vychází ze spolupráce autorky článku s P. Vopěnkou na vydání knih VII – IX.

Literatura

[1] *Bečvářová, M.*: *České překlady a čeští překladatelé Eukleidových Základů*. Přednáška z konference Eukleides: Základy geometrie. Plzeň, 2008. Dostupné on-line: http://www.kfi.zcu.cz/akce/2008/eukleides/becvarova.pdf [cit. 2. 2. 2012]

[2] *Euklides*: Základy. Knihy I – IV komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2007.

[3] *Euklides*: Základy. Knihy V – VI komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2009.

[4] *Euklides*: Základy. Knihy VII – IX komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2010.

[5] *Euklides*: Základy. Knihy XI – XII komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2011.

Grantová podpora

Článek vznikl za podpory grantu GAUK č. 303511.

O jedné vlastnosti permutací

MARTIN BROUŠEK

posluchač Přírodovědecké fakulty UP, Olomouc

Při studiu permutací se můžeme seznámit s mnoha zajímavými vlastnostmi, ale jen zřídka narazíme na zmínku o komutativnosti jejich skládání. Pokud se s touto speciální vlastností však setkáme, stává se to v souvislosti s tzv. *disjunktními* permutacemi. Cílem tohoto příspěvku je poskytnout čtenářům informaci o počtu permutací, které jsou s danou permutací komutativní. V závěru článek porovnává na příkladu počet disjunktních a všech komutativních permutací.

Uveďme nejprve některé důležité pojmy a definice. Symbolem $|M|$ značíme počet prvků konečné množiny M. *Pevným bodem* permutace φ neprázdné konečné množiny M rozumíme každý prvek $a \in M$, pro který platí $\varphi(a) = a$. *Složením* permutací φ a ψ rozumíme takovou permutaci $\varphi \circ \psi$, kde pro každý prvek a z množiny M platí $(\varphi \circ \psi)(a)=\varphi(\psi(a))$.

Definice 1

Permutace φ,ψ prvků neprázdné konečné množiny M nazveme navzájem *disjunktní*, právě když pro množiny M_φ, M_ψ jejich pevných bodů platí

$$M_\varphi \cup M_\psi = M.$$

Skládání takových dvojic disjunktních permutací je, jak známo, přitom komutativní. Snadný důkaz tohoto tvrzení nalezneme např. v publikacích [1] nebo [2]. Tuto skutečnost si můžeme ukázat na příkladu:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,3\,5\,2\,4\,6\,7\,8 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,7\,8\,6 \end{pmatrix}$$

Obě permutace jsou evidentně disjunktní, přičemž jejich komutativnost lze snadno ověřit:

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,3\,5\,2\,4\,7\,8\,6 \end{pmatrix} = \psi \circ \varphi$$

Za pozornost však rovněž stojí permutace, které s danou permutací φ disjunktní nejsou, a přitom jejich složení s φ je komutativní. Např. pro výše uvedenou permutaci φ a permutaci ϱ

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,8\,7\,1 \end{pmatrix}$$

platí

$$\varphi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 6\,4\,2\,5\,3\,8\,7\,1 \end{pmatrix} = \varrho \circ \varphi\,.$$

Definice 2

Nechť je dána permutace φ n-prvkové množiny M. Pro každé $a \in M$ nazýváme posloupnost

$$a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a), \ldots$$

orbitou prvku a v permutaci φ. Množinu všech navzájem různých prvků této posloupnosti značíme O_i, kde $1 \leq i \leq n$.

Poznámka. Pro zjednodušení budeme často pojem orbita používat také pro množinu navzájem různých prvků této orbity a pro obojí budeme používat označení O_i.

Při podrobnějším studiu se zde naskýtá zajímavá otázka: Kolik existuje permutací ψ vzhledem k dané n-prvkové permutaci φ, jejichž složení permutací φ je komutativní? Na tuto otázku dává odpověď následující věta.

Věta

Nechť φ je permutace k-prvkové množiny M. Pak pro počet S všech permutací ψ, které jsou s φ navzájem komutativní, platí:

$$S = (1^{d_1} d_1!)(2^{d_2} d_2!) \ldots (k^{d_k} d_k!) = \prod_{p=1}^{k} p^{d_p} d_p!,$$

kde k je počet prvků permutace φ a d_p je počet všech orbit s právě p prvky.

Důkaz. Uvažujme permutaci φ složenou z orbit $O_r\,(r = 1, 2, \ldots, s)$. Uvažujme některé dvě orbity O_x a O_y ($|O_x| = n$, $|O_y| = m$, kde platí $m \leq n$). Označme dále x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) prvky orbity O_x a y_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) prvky O_y tak, že

$$\varphi(x_1) = x_2, \varphi(x_2) = x_3, \ldots, \varphi(x_n) = x_1$$

a

$$\varphi(y_1) = y_2, \varphi(y_2) = y_3, \ldots, \varphi(y_m) = y_1.$$

Hledáme-li ψ tak, aby platilo $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak pro naše potřeby rozlišíme dva případy:

$$\psi(x_i) \notin O_x \quad \text{nebo} \quad \psi(x_i) \in O_x\,.$$

Zabývejme se nejprve důsledky první možnosti. Nechť např. $\psi(x_1) = y_1$. Tedy

$$(\varphi \circ \psi)(x_1) = \varphi(\psi(x_1)) = \varphi(y_1) = y_2$$

a mají-li být permutace φ a ψ komutativní, pak

$$y_2 = (\psi \circ \varphi)(x_1) = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(x_2).$$

Stejně pak

$$\psi(x_3) = y_3,\ \psi(x_4) = y_4,\ \ldots,\ \psi(x_m) = y_m,$$

dále však $\psi(x_{m+1}) = y_1$ toto je ale možné pouze v případě, že $m = n$ $(x_{m+1} \sim x_1)$.

Má-li tedy permutace ψ zobrazit prvek některé orbity na prvek jiné orbity, musí mít tyto orbity stejný počet prvků a také všechny zbývající prvky první orbity se musí zobrazit do téže orbity a toto zobrazení je jednoznačně určeno zobrazením zvoleného prvku.

Podobně lze postupovat i v druhém případě; nechť např. $\psi(x_1) = x_3$. Platí tedy

$$(\varphi \circ \psi)(x_1) = \varphi(\psi(x_1)) = \varphi(x_3) = x_4.$$

Pokud ale platí $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak

$$x_4 = (\psi \circ \varphi)(x_1) = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(x_2),$$

tedy $\psi(x_2) = x_4$, stejně tak

$$\psi(x_3) = a_5,\ \psi(x_4) = x_6,\ \ldots,\ \psi(x_{n-1}) = x_1,\ \psi(x_n) = a_2.$$

Zobrazí-li permutace ψ některý prvek orbity O_x na prvek téže orbity, musí analogicky zobrazit i všechny zbývající prvky orbity O_x a toto zobrazení je dáno jednoznačně zobrazením zvoleného prvku.

Je-li tedy dána permutace φ a chceme určit počet S všech různých permutací ψ takových, že $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi$, rozložme nejprve orbity permutace φ do skupin podle počtu jejich prvků. Z předchozích poznatků víme, že žádná taková permutace ψ nemůže prvek jedné skupiny zobrazit na prvek skupiny jiné a musí jej tedy zobrazit na některý z prvků výchozí skupiny. A navíc se vždy celá orbita zobrazí na celou orbitu a jednoznačnost tohoto zobrazení je zajištěna zobrazením jediného prvku.

Uvažujme tedy skupinu obsahující všechny orbity s právě p prvky a označme d_p počet těchto orbit. Existuje tak $d_p!$ možností, jak se mohou tyto orbity na sebe vzájemně zobrazit, a přitom každá z d_p orbit se může na jinou zobrazit právě p způsoby. Proto pro tuto skupinu existuje $p^{d_p} d_p!$ možností, a to nezávisle na všech ostatních skupinách. Užitím principu součinu pro všechna možná p tak dostáváme celkový počet všech možných permutací ψ. Platí tedy

$$S = (1^{d_1} d_1!)(2^{d_2} d_2!) \dots (k^{d_k} d_k!) = \prod_{p=1}^{k} p^{d_p} d_p!$$

Tím je důkaz ukončen.

K procvičení a objasnění dané problematiky uvádíme nasledující příklad.

Příklad

Je dána permutace

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,4\,2\,3\,6\,7\,5\,8 \end{pmatrix}.$$

Určete počet všech disjunktních, resp. komutativních permutací k permutaci φ.

[Počet disjunktních permutací je 2; počet komutativních permutací je 36]

Poznámka. Počet P disjunktních permutací je zřejmě $P = d_1!$, kde d_1 je počet pevných bodů dané permutace.

Z uvedeného příkladu je patrné, že disjunktní permutace tvoří jen zlomek všech komutativních permutací a je také zřejmé, že jedinou permutací, pro niž je počet disjunktních roven počtu komutativních permutací, je permutace identická, neboť právě pro ni platí, že všechny její orbity jsou délky 1, tj. všechny prvky jsou pevnými body této permutace.

Literatura

[1] *Mladenović, P.*: Kombinatorika (Materijali za mlade matematičare, sv. 22). Beograd, 1992.

[2] *Riordan, J.*: An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

[3] *Švrček, J.*: Úvod do kombinatoriky. Vydavatelství UP Olomouc, 2008.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování dalších nových úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 7. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 193

Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a reálnými parametry a, b má reálné řešení, právě když platí

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Jaroslav Švrček

Úloha 194

Žáci dostali za domácí úkol zvolit si tři kladná reálná čísla, pak vypočítat podíly libovolných dvou z nich, přičíst k nim třetí číslo a všech šest možných výsledků napsat do sešitu. Petr vypočítal čísla $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4, \frac{20}{3}$. Pan učitel se podíval na Petrovy výsledky a řekl, že má ve výpočtu chybu. Petr znovu zopakoval výpočty (teď už správně) a zjistil, že v jedné hodnotě opravdu chybu udělal. Jak mohl pan učitel bez znalosti tří Petrových čísel zjistit, že Petr udělal chybu? Se kterými čísly Petr počítal?

Pavel Calábek

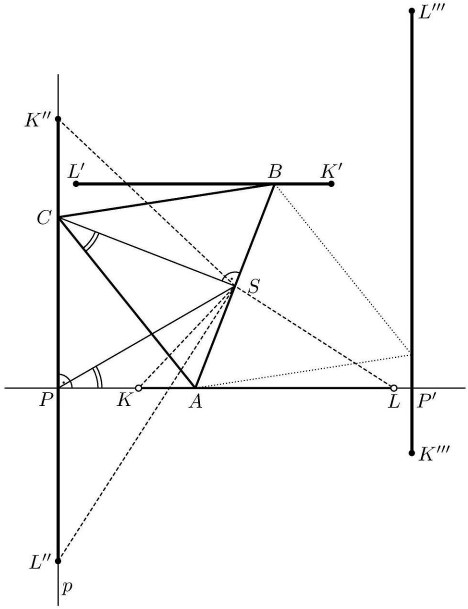
Dále uvádíme řešení úloh 187 až 190, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém a devátém čísle předešlého (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 187

Je dána úsečka KL a bod S, který na ní neleží. Najděte množinu všech vrcholů B a C rovnostranných trojúhelníků ABC takových, že $A \in KL$ a S je středem AB.

Šárka Gergelitsová

Řešení. Nechť A je bodem úsečky KL, potom bod B je bodem úsečky $K'L'$ souměrně sdružené s úsečkou KL podle středu S. A naopak, ke každému bodu B úsečky $K'L'$ existuje bod A, pro který je S středem úsečky AB.



Označme P patu kolmice z vrcholu C k přímce KL. Bod S je patou výšky trojúhelníku ABC z vrcholu C a body S, A, P, C tak leží podle Thaletovy věty na téže kružnici. Navíc podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly SPA a SCA shodné a mají velikost $30°$. Přímka SP proto svírá s přímkou KL úhel $30°$. Vrchol C rovnostranného trojúhelníku ABC tak bude ležet na kolmici p k přímce KL, která prochází bodem P, který je průsečíkem přímky procházející bodem S a svírající s přímkou KL úhel 30°. Takové body existují dva (v případě, že bod S bude bodem přímky KL to bude jeden bod $P \equiv S$), uvažujme například bod P podle obrázku. Potom C bude bodem úsečky $K''L'' \subset p$, kde úhly $L''SL$ a $K''SK$ jsou pravé.

Naopak, nechť C je bodem úsečky $K''L''$. Potom kolmice k přímce CS protne úsečku KL v jejím bodě A a podle věty o obvodovém úhlu bude velikost úhlu ACS rovna 30°. Podobnou úvahu můžeme provést pro druhý průsečík P' přímky procházející bodem S a svírající s přímkou KL úhel 30° a dostaneme tak úsečku $K'''L'''$ (která je souměrná s úsečkou $K''L''$ podle bodu S).

Množina všech vrcholů B rovnostranných trojúhelníků ABC ze zadání je úsečka $K'L'$, která je souměrná s úsečkou KL podle středu S a množina všech vrcholů C je sjednocení souměrně sdružených úseček $K''L''$ a $K'''L'''$.

Poznámka. Uvedený důkaz se dá podstatně zkrátit, když si uvědomíme, že bod C je obrazem složení otočení o 90° se středem S a stejnolehlosti s tímto středem a koeficientem $\sqrt{3}$ (tzv. *spirální podobnost*). Proto úsečka $K''L''$ resp. $K'''L'''$ je obrazem úsečky KL v této spirální podobnosti.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 188

Najděte všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že každé z čísel a, b, c je dělitelem čísla $a + b + c$.

Robert Geretschläger (*Graz*)

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a \leq b \leq c$. Jelikož c je dělitelem čísla $a+b+c$, je také dělitelem čísla $a+b \leq 2c$. Proto platí buď $a + b = 2c$, nebo $a + b = c$. Oba případy posoudíme samostatně.

V případě $a + b = 2c$ z nerovnosti $a \leq b \leq c$ plyne $a = b = c$. Trojice (a, a, a), kde a je libovolné přirozené číslo, zřejmě zadání vyhovuje, jak snadno ověříme zkouškou.

Nyní předpokládejme, že $c = a+b$. Protože b je dělitelem čísla $a+b+c$, je také dělitelem čísla $a+c = 2a+b$, a tedy i dělitelem čísla $2a$. Z nerovnosti

$a \leq b$ plyne buď $a = b$, nebo $a = 2b$. Pro libovolné přirozené číslo a v prvním případě zkouškou ověříme, že trojice $(a, a, 2a)$ vyhovuje zadání. Podobně ve druhém případě ověříme, že trojice $(a, 2a, 3a)$ také vyhovuje zadání.

Úloha má řešení 10 typů. Pro libovolné přirozené číslo a jsou řešeními trojice (a, a, a), $(a, a, 2a)$, $(a, 2a, a)$, $(2a, a, a)$, $(a, 2a, 3a)$, $(a, 3a, 2a)$, $(2a, a, 3a)$, $(2a, 3a, a)$, $(3a, a, 2a)$, $(3a, 2a, a)$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 189

Nechť ABC je libovolný ostroúhlý trojúhelník. Označme D, E, F paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Dále nechť K, L, M jsou průsečíky kružnice opsané trojúhelníku ABC s přímkami AD, BE, CF (různými od A, B, C). Dokažte, že platí

$$\min\left\{\frac{|KD|}{|AD|}, \frac{|LE|}{|BE|}, \frac{|MF|}{|CF|}\right\} \leq \frac{1}{3}.$$

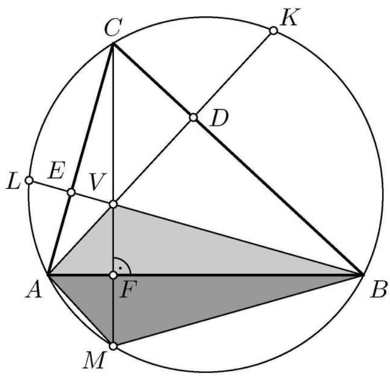
Jaroslav Švrček

Řešení. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Podle známého tvrzení platí, že obrazy bodu V v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA leží na kružnici danému trojúhelníku opsané. Tyto obrazy jsou po řadě M, K, L. Trojúhelníky ABV a ABM jsou shodné, mají proto stejné obsahy, proto pro obsahy S_{ABV} a S_{ABC} trojúhelníků ABV a ABC platí

$$\frac{S_{ABV}}{S_{ABC}} = \frac{|VF|}{|CF|} = \frac{|MF|}{|CF|}.$$

Podobně platí

$$\frac{S_{BCV}}{S_{ABC}} = \frac{|VD|}{|AD|} = \frac{|KD|}{|AD|} \qquad \text{a} \qquad \frac{S_{CAV}}{S_{ABC}} = \frac{|VE|}{|BE|} = \frac{|LE|}{|BE|}.$$



Součtem levých stran těchto tří rovností tak dostaneme

$$\frac{S_{ABV}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BCV}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CAV}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABV} + S_{BCV} + S_{CAV}}{S_{ABC}} = 1.$$

Proto platí i

$$\frac{|KD|}{|AD|} + \frac{|LE|}{|BE|} + \frac{|MF|}{|CF|} = 1.$$

Jelikož každý ze sčítanců na levé straně této rovnosti je kladné číslo, plyne odtud platnost dokazovaného tvrzení

$$\min\left\{\frac{|KD|}{|AD|}, \frac{|LE|}{|BE|}, \frac{|MF|}{|CF|}\right\} \leq \frac{1}{3},$$

čímž je důkaz ukončen.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

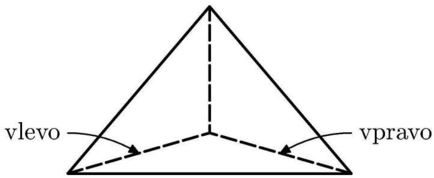
Úloha 190

Petrova stavebnice obsahuje 6 shodných tyčinek 6 různých barev. Kolik navzájem různých modelů pravidelného čtyřstěnu z ní může Petr postavit?

(Dva modely považujeme za shodné, jestliže je můžeme otočit tak, aby se barvy jejich odpovídajících hran shodovaly.)

Pavel Calábek

Řešení. Použité barvy očíslujme $1, 2, \ldots, 6$. Nejprve zafixujeme polohu daného čtyřstěnu. Položme tento čtyřstěn na stůl tak, že hrana s barvou 1 leží na podložce vepředu (obr.).



Pokud hrana s barvou 2 nemá s hranou barvy 1 společný vrchol, můžeme čtyřstěn otočit tak, že hrana s barvou 3 leží na stole. Potom leží buď vpravo nebo vlevo a čtyřstěn je umístěn jednoznačně. Proto pro každou polohu hrany s barvou 3 existuje 3! možností, jak obarvit zbývající tři hrany. Celkem tedy existuje $2 \cdot 3! = 12$ obarvení čtyřstěnu takových, že hrany s barvou 1 a 2 nemají společný vrchol.

Jestli hrana s barvou 2 má společný vrchol s hranou barvy 1, otočme čtyřstěn tak, aby tato hrana ležela na podložce. Potom opět může ležet vpravo nebo vlevo a čtyřstěn je tímto umístěním fixován. Pro každou polohu hrany 2 tak existuje 4! možností, jak obarvit čtyři zbývající hrany. Celkem existuje $2 \cdot 4! = 48$ možností, jak obarvit hrany čtyřstěnu tak, že hrany s barvami 1 a 2 mají společný vrchol.

Dohromady tedy existuje $12 + 48 = 60$ různých možností, jak obarvit hrany čtyřstěnu 6 barvami. Petr tak může ze šesti tyčinek různých barev složit 60 různých modelů pravidelného čtyřstěnu.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

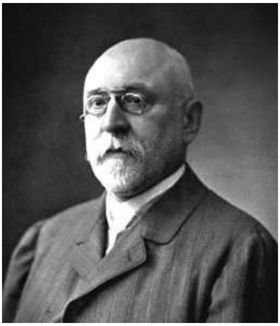
Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Pavel Calábek

FYZIKA

Historie fyziky ve Strouhalově Akustice nalezená

IVO VOLF – KATEŘINA VONDŘEJCOVÁ
Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové



Čeněk Strouhal

Malý počet vyučovacích hodin, věnovaných fyzikálnímu učivu, a snaha co nejstručněji žákům vysvětlit podstatu a užitečné použití fyzikálních poznatků vede často k tomu, že zapomínáme při výuce sdělovat základní informace, které se týkají vývoje poznatků. Tím vzniká často v žácích nesprávný dojem, že fyzikální poznání je velmi jednoduše získatelné, že v učebnicích jsou výsledky většinou přímé cesty od konkrétního pozorování k teorii a potom zase zpět k praktickým aplikacím. Historické motivace, jež vedou k pochopení, proč se lidé problémy začali zabývat, jak volili hypotézy a museli je potvrzovat nebo odmítat, jsou potom pro učitele fyziky jakýmsi nadbytečným materiálem, které je nejlehčí vynechat, aby zbyl čas také na opakování a zkoušení.

I když v poslední době vyšlo několik prací z historie fyziky od *I. Krause*, které upozorňují čtenáře na to, že fyzikální poznání je součástí kulturního dědictví lidstva a má tedy výchovný vliv na žáky základních a středních škol, a to nejen v oblasti fyziky a techniky, ale při řešení problémů vůbec, nedostaly se tyto práce ještě na jednotlivé školy. Na druhé straně mají velký vliv na učitele i práce, které před řadou let byly považovány za zdroj poznávání pro učitele středních a vysokých škol. Jedním z takových pramenů jsou vysokoškolské učebnice fyziky, které na začátku minulého století zpracoval Čeněk Strouhal, přední experimentální fyzik.

Historická poznámka: Čeněk (Vincent) Strouhal se narodil 10. dubna 1850 v Seči u Chrudimi, maturoval v Hradci Králové v roce 1869 a vystudoval filosofickou fakultu Univerzity Karlovy, poté se stal od roku 1875 asistentem ve Würtzburgu, kde se v roce 1878 habilitoval. V roce 1882 se stal profesorem geologického ústavu v New Yorku, ale brzy byl povolán na jako profesor experimentální fyziky na tehdy právě oddělené české univerzitě v Praze. Ve vědecké komunitě se stal známým svými pracemi z akustiky. V letech 1903/4 byl rektorem Univerzity Karlovy. Velmi známé jsou jeho učebnice pro vysokoškolské studenty Mechanika (1901), Akustika (1902), Thermika (1908) a Optika (1919), které vydala Jednota českých matematiků v Praze. Předností těchto učebnic jsou především historické motivace, jež doprovázejí velmi odborný, ale srozumitelný výklad. Strouhal zemřel 23. ledna 1922 v Praze.

Na Strouhalových vysokoškolských učebnicích fyziky nejvíce oceňujeme nejen styl výkladu, ale zejména historická východiska, která doprovázejí tento výklad a umožňují čtenáři, aby se nechal konfrontovat s minulostí na základě konkrétních údajů. Proti nám měl Čeněk Strouhal výhodu v tom, že byl přece jen o sto let blíže minulosti, než jsou dnešní čtenáři. Historické údaje nám umožňují vycházet z konkrétních motivací, které mohou být zdrojem informací pro nové fyzikální úlohy. Dnes jsme vybrali Strouhalovu Akustiku; důvodem je skutečnost, že akustické jevy nás dennodenně provázejí životem, pomocí sluchu získáváme značné procento informací, ale o zvuku, akustických jevech a konkrétně o hudební akustice se dnešním žákům na základních a středních školách dostává poznatků velmi málo.

Zdroji zvuku mohou být v současné době různá technická zařízení, z nichž se line hlas řečníků, přenosy divadelních her, koncertů, doprovázejí televizní vysílání... Ve škole se žáci dozvídají o tom, že základem zvuku jsou různé periodické jevy, které se šíří vzduchem a jež mají požadovanou frekvenci, na kterou je citlivé lidské ucho, konkrétně mezi frekvencemi 16 Hz až 20 000 Hz. Málokdy se dostaneme ve školní výuce ke zdrojům zvuku, jako jsou sirény, na nichž lze dobře vyložit vztah mezi frekvencí dějů a výškou tónu. K výkladu potřebujeme ozubené kolečko, které roztočíme na odstředivém stroji a můžeme získat informaci o sirénách, konkrétně o siréně, kterou lékař a fyzik na College de France *Félix Savart* (1830); siréna se skládá z několika mosazných desek, umístěných na společné vodorovné ose, která prochází jejich středem (obr. 1). Na obvodu kruhových desek jsou vypilovány zuby, k nim se přiloží karton, jenž se uvede nárazy na ozubení do kmitavého pohybu. Např. zvolíme

Obr. 1 [1]

Obr. 2 [2]

čtyři desky s počtem zubů 80, 100, 120, 160, což lze vyjádřit poměrem 4 : 5 : 6 : 8; při vhodné frekvenci potom vznikají slyšitelné tóny.

Úloha 1: Na základě údaje o Savartově siréně určete, jakou frekvencí se musejí otáčet měděné desky, aby vzniklý nejnižší tón měl frekvenci 110 Hz, jakou frekvencí se budou desky otáčet, když nejvyšší tón dosáhne frekvence 440 Hz? Jakých frekvencí dosáhnou tóny přiložením kartonu k dalším dvěma ozubeným kolečkům? Jak se nazývají hudební intervaly, které je možno uslyšet přiložením kartonu postupně k jednotlivým otáčejícím se mosazným deskám?

Siréna Seebeckova, jejíž autor byl profesorem fyziky na univerzitě v Lipsku, *Friedrich W. A. Seebeck* (1805–1849), je vytvořena jedinou deskou, v níž jsou místo ozubení otvory, vyvrtané tak, že jejich vzdálenosti od středu rotujícího disku jsou stálé podle (obr. 2). V soustředných kruzích můžeme vytvořit několik soustav otvorů, proti nimž se žene vzduch úzkou trubičkou; dochází tak k přerušování proudu vzduchu a následně k vytvoření tónů o určité frekvenci. Nejmenší čísla pro určení počtu otvorů na osmi soustředných kružnicích jsou 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48.

Úloha 2: Jakou frekvencí se musí otáčet mosazná deska s otvory, aby v pořadí šestý vzniklý tón měl frekvenci 440 Hz? Jaké frekvence bude vydávat siréna, když trubičku s proudícím vzduchem budeme přesunovat od středu základní desky až po okraj?

Akustika se zabývá nejen vznikem zvuku, ale otázkami stanovení rychlosti zvuku. Na základě pozorování bylo zjištěno odhadem, že rychlost zvuku je podle *P. M. Mersenna* (1588–1648) asi 448 m/s, což uvádí také *P. Gassendi* (1592–1655). Později v roce 1656 byla hodnota upřesněna na 350 m/s. K odhadům se dostali pozorováním záblesku při výstřelu a okamžikem, kdy dospěl k pozorovateli zvuk způsobený tímto výstřelem.

Úloha 3: Vysvětlete postup, který se užíval v 17. století k odhadu rychlosti zvuku ve vzduchu. Pokuste se navrhnout obdobný experiment v dnešních podmínkách (abyste nemuseli střílet starou puškou) a vysvětlete, proč se pozorovatelé dostali k poměrně nepřesnému výsledku.

V 17. století se zabýval stanovením rychlosti zvuku ve vzduchu také *Isaac Newton*; dnes bychom vyjádřili jeho úvahy o rychlosti zvuku vztahem $c = \sqrt{p/\varrho}$, kde p je tlak vzduchu a ϱ hustota vzduchu za dané teploty. Vztah se zdá být rozměrově v pořádku, avšak výsledky výpočtů se od experimentálně zjištěných údajů značně liší.

Úloha 4: Stanovte rychlost zvuku pomocí Newtonova vztahu. Víte, že hustota vzduchu závisí na teplotě a na tlaku, tedy $\varrho = M_{\mathrm{m}}p/RT$, dále $T = T_0(1 + \gamma t)$, kde $\gamma = 1/(273\,\mathrm{K}) = 0{,}003\,67\,\mathrm{K}^{-1}$.

Nesoulad mezi teorií a pozorováním dal další popud experimentátorům, aby zpřesňovali své pokusně určené hodnoty pro rychlost zvuku ve vzduchu. *R. Boyle* určil kolem roku 1700 hodnotu 366 m/s, *Cassini*, *Huygens*, *Picard* a *Römer* ve stejné době 356 m/s, *Flamsteed* a *Halley* v letech 1708 a 1709 hodnotu 348 m/s. V roce 1738 bylo provedeno několik experimentů, kdy v okolí Paříže bylo vybráno několik pozorovacích stanic – na dvou, což byly pevnosti Montmartre a Montlhéry, byly dávány signály formou dělových výstřelů a na dalších místech (pařížská hvězdárna, Fontanay-aux-Roses, zámek Lay) se konala pozorování časová, aby se vyloučil vliv větru. Když byl výsledek přepočítán na teplotu 0 °C, vycházela hodnota 332,0 m/s. Pozorování se opakovala ještě v Jižní Americe (De La Condamine v Quito 1740 získal hodnotu 339 m/s, později 1744 v Cayenne na břehu mořském při poměrně vysoké teplotě získali hodnotu 357 m/s); výsledkem bylo, že Newtonem získaný vztah bude nutno ještě upravit, neboť výsledky se nikdy nedostaly pod hodnotu 330 m/s. Až v roce 1816 se úkolu ujal fyzik *P. Laplace*, který vyšel z myšlenky, že děje, spojené s šířením zvuku ve vzduchu, jsou povahy adiabatické, nikoli izotermické, a pro vznikající změny nebude platit vztah Boylův-Mariottův, nýbrž Poissonův. Výsledný vztah potom získal tvar $c = \sqrt{\varkappa p/\varrho}$.

Úloha 5: Odhadněte, jaká je změna rychlosti zvuku spojená se změnou teploty o 1 °C.

Úloha 6: Podle upraveného vztahu určete rychlost zvuku ve vzduchu při teplotě 0 °C, je-li známo, že pro vzduch $\varkappa = 1{,}40$. Pokuste se úpravou vztahu s využitím informace v úloze 4 zjistit, jak závisí rychlost zvuku ve vzduchu na absolutní teplotě T.

Uveďme nyní informaci, týkající se měření rychlosti zvuku v noci dne 21. června 1822. Měření se konala na dvou stanicích – Villejuif a Montlhery, jejichž vzájemnou vzdálenost změřil *Arago* triangulací a získal hodnotu 18 612,5 m. Postup při experimentování byl následující: V jistém domluveném okamžiku vypálilo ránu dělo na první stanici, přesně po době 5 min vypálilo ránu dělo na druhé stanici, pět minut nato odpovědělo dělo na první stanici, pět minut nato ve druhé stanici a tak to pokračovalo, až počet ran dosáhl domluvené hodnoty. Aby se vyloučil vliv větru, byly doby zkombinovány, takže průměrná doba, za kterou urazil zvuk příslušnou trasu, byla 54,6 s při teplotě 15,9 °C.

Úloha 7: Na základě provedených měření vypočtěte střední hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu při dané teplotě. Víte-li, že rychlost zvuku se mění se změnou teploty o 1 °C o hodnotu 0,61 m/s, určete z daných hodnot rychlost zvuku při teplotě 0 °C. Získané výsledky porovnejte s dnešními hodnotami.

Jestliže uvážíme pohyb vzduchu, pak nejvýraznější změny nastanou, bude-li se zvuku šířit po větru (celková rychlost zvuku c se změní na $c+v$, kde v je rychlost větru) po dobu t_1, nebo proti větru (rychlost zvuku bude $c-v$) po dobu t_2; potom vhodně vyloučíme vliv větru a získáme dobu šíření zvuku za bezvětří po dobu t. Potom platí $ct = (c+v)t_1 = (c-v)t_2$. Po úpravách vztahu získáme hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu za bezvětří. Pokusy o změření rychlosti zvuku se pak opakovaly ještě 27. a 28. června 1823 na pláni Utrechtské; vzájemná vzdálenost pozorovacích stanic byla 17 669,3 m a průměrná hodnota změřených dob (mezi optickým a akustickým signálem) při teplotě 12 °C byla 52 s.

Úloha 8: Vypočtěte, k jaké hodnotě rychlosti zvuku ve vzduchu se dopracovala skupina vědců po měření na pláni Utrechtské.

Při stanovení rychlosti zvuku v kovech se vychází ze vztahu $c = \sqrt{E/\varrho}$, kde E je Youngův modul pružnosti a ϱ je hustota látky.

Úloha 9: Určete rychlost zvuku ve vybraných kovech – ocel, hliník, mosaz... Příslušné hodnoty modulu pružnosti a hustoty najdete v tabulkách nebo na internetu.

Úloha 10: Ve Strouhalově Akustice najdeme i řešení problému, jenž autor nazývá Newtonův: Jak lze z doby dopadu kamene do propasti stanovit hloubku této propasti. Předpokládáme, že znáte vztahy pro řešení kvadratické rovnice. Pokuste se vypočítat z doby t, která se skládá z doby volného pádu t_1 a doby návratu zvukového signálu vzniklého při dopadu kamene t_2, kde $t = t_1 + t_2$, určit hloubku propasti. Úlohu řešte analyticky na základě řešení kvadratické rovnice. Jak se bude lišit výsledek výpočtu v létě při rychlosti zvuku 340 m/s a v zimě při rychlosti 328 m/s?

Poté, co byla zjištěna rychlost zvuku ve vodě a dosáhlo se souladu měření a teorie, pokusili se o přímé měření rychlosti zvuku ve vodě v roce 1827 *J. D. Colladon* a *Ch. Sturm* na Ženevském jezeře v místě, kde jezero dosahuje největší šířky 13,487 km, a to mezi městy Rolle a Thonon. Při měření byl dáván akustický signál úderem na zvon, do vody ponořený, optický zapálením střelného prachu. Důležité bylo zajištění současnosti mezi oběma signály, jež byla zajištěna pákovým zařízením – v okamžiku, kdy kladivo udeřila na zvon, byla zapálena hromádka prachu a způsobila záblesk. Druhým problémem bylo stanovení okamžiku, kdy dorazil akustický signál. To bylo provedeno velkým naslouchátkem, jehož širší otvor byl uzavřen membránou a užší byl vložen do zvukovodu ucha. Opoždění zvukového signálu oproti optickému se měřilo několikrát a výsledky se zprůměrovaly. Toto opoždění dosáhlo v průměru hodnoty 9,4 s.

Úloha 11: Na základě uvedených informací zjistěte střední hodnotu rychlosti zvuku ve vodě při daném měření. Porovnejte získanou rychlost s rychlostí zvuku 340 m/s.

Kvůli úplnosti uvedeme ještě vztah pro rychlost zvuku v pevných látkách: $c = \sqrt{E/\varrho}$, kde E je Youngův modul pružnosti a ϱ hustota látky.

Úloha 12: Jestliže víte, že hustota oceli je 7 800 kg/m^3 a modul pružnosti $2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa určete rychlost zvukového signálu v ocelovém materiálu. Porovnejte získanou rychlost s rychlostí zvuku ve vzduchu (340 m/s).

Literatura

[1] *Strouhal, Č.*: Akustika. Jednota českých matematiků, Praha 1902.

Zdroje vyobrazení

[1] http://www.istitutomontani.it/museo/file/visstrimento.php?codice=639
[2] http://www.fgfontana.eu/museo-virtuale/fisica/facu/anteprime/mini-facu117.jpg

Rozumíme dobře Archimedovu zákonu?

BOHUMIL VYBÍRAL

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

K formulaci Archimedova zákona

Archimedův zákon platí za podmínek, pro které byl odvozen, tj. že hydrostatické (event. aerostatické síly) síly působí na celý povrch ponořeného tělesa. Jeho běžně užívaná formulace (viz např. [1], [2]) sice platí ve velké většině vyskytujících se aplikací, avšak existují případy, kdy jeho jednoduché znění může být při formální aplikaci zavádějící. Proto je navržena jeho zpřesněná formulace pro těleso v tekutině (tj. kapaliny a plyny) v tíhovém poli (viz [3]), která poněkud omezuje jeho dosud formulovanou obecnost: *Je-li těleso ponořeno celým svým povrchem do tekutiny, je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost je rovna tíze tekutiny stejného objemu, jako je objem ponořeného tělesa.*

Kriteriem pro použití běžně uváděné (anebo této zpřesněné formulace) tedy je, zda při ponoření tělesa jsou v dotyku s uvažovanou tekutinou všechny jeho ponořené povrchové plochy. Není-li tomu tak, nepůsobí hydrostatické (event. aerostatické) síly na celou povrchovou plochu ponořeného tělesa a problém je nutné řešit individuálně (např. při výpočtu sil působících na ponořený vnitřní uzávěr nádrže, u něhož je část povrchu v dotyku s jiným prostředím, zpravidla vzduchem). Někdy musíme z funkčních důvodů dokonce zabránit působení hydrostatických sil ponořených těles (např. u přehradní hráze je nutné dobře utěsnit její dno; pokud by tomu tak nebylo, způsobilo by to její nadlehčování a tím i její možnou destrukci).

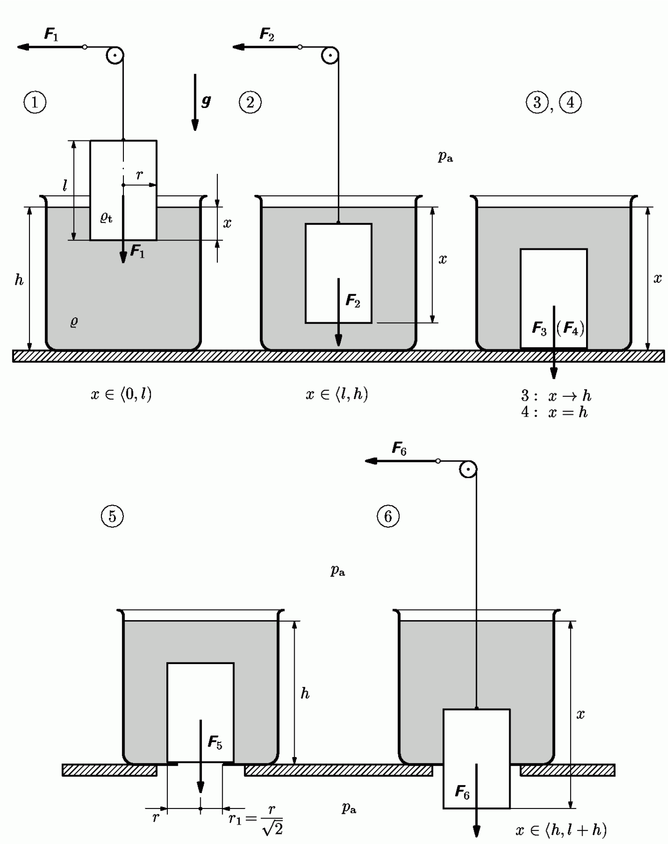
U částečně ponořených těles se při výpočtu vztlakové síly samozřejmě uplatní jen objem a povrch ponořené části, který je v dotyku s uvažovanou tekutinou, tj. té části, na níž působí hydrostatické (event. aerostatické) síly.

Na následujícím prvním příkladu je ukázáno šest různých případů působení vztlakové síly, jejíž přímý výpočet podle formálního původního znění

Archimedova zákona můžeme provést jen v polovině případů. Druhý příklad řeší zmíněnou problematiku sil u přehradní hráze.

První ilustrační příklad – analýza sil u ponořeného válce

Uvažujme homogenní válec ($\varrho_t = 2{,}70 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}) o poloměru $r = 30{,}0$ mm a výšce $l = 70{,}0$ mm a nádobu s vodou ($\varrho = 1{,}00 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}), v níž ve všech sledovaných situacích budeme udržovat hladinu ve stejné výšce $h = 120$ mm ode dna. Atmosférický tlak uvažujme $p_a = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Válec nechť se nachází ve vztahu k nádobě v šesti různých situacích (obr. 1):



Obr. 1 K analýze sil působících na válec v kapalině

1. Válec je pomocí lanka částečně ponořen do nádoby, přičemž $x \in \langle 0, l)$.

2. Zavěšený válec je zcela ponořen $x \in \langle 0, h)$.

3. Válec je položen na dno nádoby, přičemž v důsledku drobných nečistot nebo nerovnosti styčných ploch nedosedá dokonale ke dnu.

4. Válec dokonale přiléhá ke dnu (dno je zabroušeno anebo pokryto tmelem).

5. Válec na ploše mezikruží o vnitřním poloměru $r_1 = r/\sqrt{2}$ dokonale přiléhá ke dnu a tvoří uzávěr výtokového otvoru (tento případ je tedy možné považovat za model výpustného ventilu nádrže).

6. Zavěšený válec prochází volně (se zanedbatelným třením) otvorem o poloměru r ve dně nádoby, přičemž jeho plášť těsní výtokový otvor; tloušťka dna je zanedbatelná a $x \in \langle h, h + l)$.

Vypočtěte sily, které v jednotlivých případech působí na válec.

Řešení

1. $F_1 = \pi r^2(l\varrho_t - x\varrho)g \leq F_G$, $F_{1\max} = \pi r^2 l \varrho_t g = F_G = 5{,}24$ N (pro $x = 0$), $F_{1\min} = \pi r^2 l(\varrho_t - \varrho)g = 3{,}30$ N (pro $x \to l$).

2. Případ se od situace v bodě 1 liší jen tím, že hydrostatický tlak již působí na celý povrch válce a síla má konstantní velikost $F_2 = F_{1\min} = \pi r^2 l(\varrho_t - \varrho)g = 3{,}30$ N.

3. V důsledku netěsného uložení působí hydrostatická tlaková síla i na dno a výsledná síla je stejná jako v bodě 2: $F_2 = F_3 = 3{,}30$ N.

4. V důsledku těsného uložení nemůže působit na spodní podstavu válce hydrostatická tlaková síla ani síla od atmosférického tlaku. Proto $F_4 = \pi r^2[l\varrho_t g + p_a + (h - l)\varrho g] \gg F_G$, $F_4 = 293$ N.

5. Situace se oproti případu 4 liší tím, že působení atmosférického tlaku se částečně kompenzuje jeho působením u dna na kruhové ploše o poloměru r_1. Pak $F_5 = F_4 - \pi r_1^2 p_a \gg F_G$, $F_5 = 150$ N.

6. $F_6 = F_2 + \pi r^2 \varrho g x > F_G$, $F_{6\max} = F_2 + \pi r^2 \varrho g(h + l) = 8{,}57$ N, $F_{6\min} = F_2 + \pi r^2 \varrho g h = 6{,}63$ N.

Diskuse

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že formální aplikace obecně uváděného znění Archimedova zákona na složitější případy by mohla vést k závažným chybám. Výpočet vztlakové síly v situacích ad 1, 2, 3 je v souhlase s běžně uváděnou formulací Archimedova zákona – je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa. U případů 4, 5, 6 však nebyly splněny podmínky, pro které byl Archimedův zákon takto formulován a nelze jej tedy přímo použít. Pravděpodobně je překvapující i velikost síly vypočtené v těchto případech. U případů 4 a 5 je síla dána nekompenzovaným působením síly od atmosférického tlaku na dně válce. Tato síla se projeví tlakem ve stykové ploše mezi válcem a dnem nádoby.

Druhý ilustrační příklad – analýza sil u přehradní hráze

Betonová přehradní hráz, pro jednoduchost ve tvaru kvádru o výšce $a = 18$ m, tloušťce $b = 4{,}0$ m, šířce $c = 100$ m a hustotě $\varrho_b = 2{,}1 \cdot 10^3$ kg$\cdot$m^{-3}, je výškou $d = 7{,}0$m zapuštěna do tvrdého podloží (obr. 2). Výška vodní hladiny před hrází je $H = 10$ m, za hrází $h = 2{,}0$ m. Hustota vody je $\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Vypočtěte velikost síly, kterou je hráz ve svislém směru vtlačována do podloží ve dvou mezních případech:

1. hráz je v podloží dokonale utěsněna,
2. hráz dokonale netěsní, tj. mezi hrází a podložím je po celé její délce souvislá (byť tenká) vrstvička vody.

Řešení

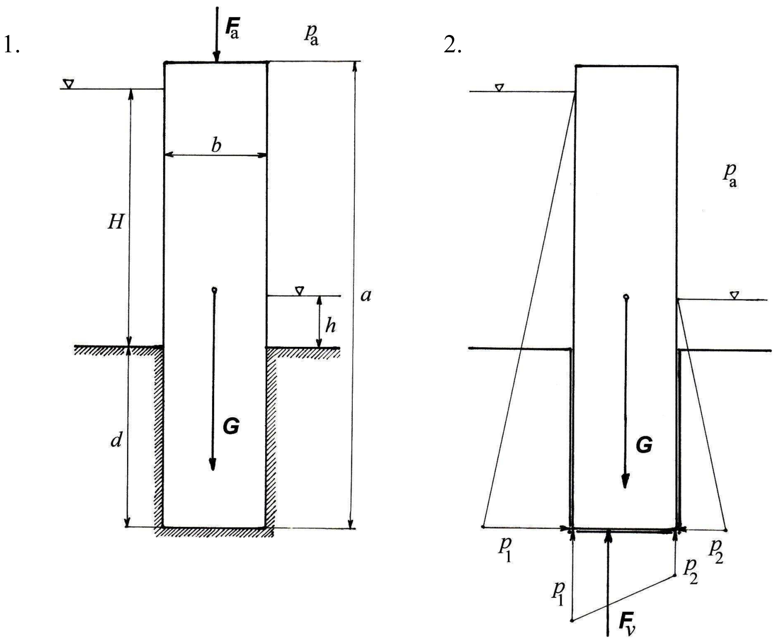
1. Ve svislém směru působí tíhová síla o velikosti G a na horní plochu bc síla atmosférického tlaku o velkosti F_a (obr. 2/1). Celková síla ve svislém směru má velikost

$$F_1 = G + F_\mathrm{a} = bc(a\varrho_\mathrm{b}g + p_\mathrm{a}) = 188\ \mathrm{MN}.$$

2. Voda působí na spodní plochu bc vztlakovou silou, která je dána střední hodnotou hydrostatického tlaku z obou stran spodní hrany hráze tj. $(p_1 + p_2)/2$ – viz obr. 2/2. Síla od atmosférického tlaku, která v případě ad 1) činila $F_\mathrm{a} = 40$ MN, je v tomto případě vykompenzována. Atmosférický tlak zde totiž prostřednictvím vody působí

i na spodní stěnu (v prvním případě se uvažuje tvrdé podloží, které tlak spodní stěnu nepřevede). Celková síla tedy je

$$F_2 = G – F_\mathrm{v} = bc\left[a\varrho_b – \frac{1}{2}(H + h + 2d)\varrho\right] g = 97\ \mathrm{MN}.$$



Obr. 2 Přehradní hráz ve dvou mezních případech

Diskuse

Zde řešená prakticky významná úloha je příkladem na situaci, kdy nelze použít běžnou formulaci Archimedova zákona. V prvním případě je přítlačná síla dána jednak tíhou vlastní betonové hráze, jednak tíhou vzduchu, který je nad ní (zde je to nezanedbatelná velikost 40 MN, která tvoří 27 % tíhy betonové hráze). Ve druhém případě tíhu hráze částečně zmenšuje hydrostatická vztlaková síla (nepočítaná ovšem podle Archimedova zákona), tíhová síla vzduchu se však naopak neuplatní – je kompenzovaná tlakem na spodní stěnu hráze). Žádoucí svislé upevnění hráze svislou silou je zde oproti prvnímu případu sníženo na pouhých 52 %.

Závěr

V práci je ukázáno, že i k tak dlouho známému zákonu, jakým je zákon Archimedův, je možné ještě něco dodat. Jde o to, aby jeho jednoduchá formulace nebyla při aplikacích zavádějící. Uvedené dva ilustrační příklady jsou velmi vhodné k zařazení k procvičení hydrostatického tlaku a Archimedova zákona ve středoškolské fyzice.

Literatura

[1] *Svoboda, E.* a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Praha: Prometheus, 2006.

[2] *Chytilová, M.*: Archimedův zákon. Knihovnička FO č. 19, Hradec Králové: MAFY, 1996.

[3] *Vybíral, B.*: Mechanika ideálních kapalin. Knihovnička FO č. 62, Hradec Králové: MAFY, 2003.

Myšlenkové odvozování veličinových rovnic

VOJTĚCH ŽÁK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

1 Úvod

Myšlenkovým odvozováním veličinových rovnic rozumíme v tomto článku hledání vztahů mezi fyzikálními veličinami na základě jednodušších úvah, které neprobíhají striktně deduktivně z obecných vztahů dané teorie, ale spíše se opírají o názor žáků a jejich předchozí zkušenosti. Jasnější vymezení bude zřejmé z uvedených pěti příkladů.

K napsání tohoto článku mě vedlo několik důvodů, které bych rád na tomto místě zmínil. Především bych se rád omluvil, že se zabývám tak neatraktivním tématem, jako je „odvozování vzorečků". Dále bych chtěl upozornit, že se nejedná o „nic nového pod sluncem", že určité náznaky tohoto přístupu najdeme i v běžných učebnicích fyziky a že někteří učitelé uvedený přístup jistě využívají. Z metodického hlediska můžeme tento přístup zahrnout do heuristické metody (konkrétně se jedná o zvláštní případ heuristického rozhovoru, viz [1], s. 79).

- Odvozování veličinových rovnic (rovnic mezi fyzikálními veličinami) patří mezi méně oblíbené činnosti žáků našich základních a středních škol.

Tomuto tvrzení dají zřejmě zapravdu nejen mnozí učitelé, ale vyplynulo to také z výzkumu, který uskutečnila Katedra didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v rámci projektu Národního programu výzkumu II, č. 2E06020, Fyzikální vzdělávání pro všestrannou přípravu a rozvoj lidských zdrojů na úrovni základních a středních škol (podrobněji o závěrech projektu viz [2]). Konkrétně měli žáci základních škol a nižšího stupně víceletých gymnázií (celkem asi 1900 respondentů) a dále žáci vyššího stupně víceletých gymnázií, čtyřletých gymnázií a středních odborných škol (více než 2 000 respondentů) ohodnotit zhruba 15 činností, které by mohli ve výuce fyziky dělat. Žáci měli svůj zájem věnovat se nabídnutým činnostem ohodnotit na čtyřstupňové škále: 1 – velmi souhlasím, 2 – spíše souhlasím, 3 – spíše nesouhlasím, 4 – velmi nesouhlasím. „Odvozování vzorečků, nejen učení se je nazpaměť" se mezi nabídnutými činnostmi umístilo na předposledním místě s průměrným hodnocením 2,5 u žáků ZŠ a 2,7 u žáků SŠ. Hůře dopadlo už jen „počítání příkladů (řešení početních úloh)". Pro zajímavost dodejme, že na prvním místě se objevilo „dělání pokusů vlastníma rukama".

Protože se domnívám, že odvozování veličinových rovnic má potenciál podpořit u žáků rozvoj náročnějších myšlenkových procesů, považuji za užitečné se tomuto tématu věnovat. Nic na tom nemění fakt, že „to žáky moc nebaví". Nemyslím si, že bychom se ve škole jako učitelé měli věnovat pouze záležitostem, které žáci hodnotí bezprostředně jako zábavné a které zrovna chtějí dělat. Zatímco některé články v oborově didaktických časopisech (nejen MFI) se zabývají inovacemi ve výuce, které mají zejména vyjít vstříc bezprostřednímu zájmu žáků, tento článek má podpořit pěstování aktivit, o jejichž užitečnosti jsou zřejmě více přesvědčeni učitelé než jejich žáci. Domnívám se ovšem, že oba typy článků mají v odborné diskuzi svoje místo a mohou se doplňovat.

- Uvedený přístup může podpořit čtenářskou gramotnost, konkrétně porozumění symbolickému zápisu a také rozvoj kritického myšlení.
- Uvedený přístup má také svá omezení. Některá z nich budou myslím čtenáři zřejmá při seznamování se s jednotlivými náměty. Dále jsou tato omezení a úskalí diskutována v závěru článku. V následujícím se soustředíme zejména na případy, kdy ani experimentální, ani teoretické odvozování z obecnějších vztahů není na střední škole možné reálně využít (náročnější přístrojové vybavení, pokročilejší matematický aparát apod.).
- Uvedené myšlenkové odvozování veličinových rovnic může žákům usnadnit rekonstrukci poznatků v jejich mysli, může napomoci hlubšímu a méně mechanickému osvojování poznatků, než jsou různé mnemotechnické pomůcky.

V následujícím je uvedeno pět námětů na myšlenkové odvozování ze středoškolské fyziky. Všechny byly opakovaně využity při výuce na vyšším stupni osmiletého gymnázia a na čtyřletém gymnáziu. První námět je nejautentičtější ukázkou, která poskytuje obraz o průběhu rozhovoru mezi učitelem a žáky. Další čtyři ukázky se soustředí na nejdůležitější momenty odvozování.

2 Odvození vztahu pro odpor vodiče $R = \varrho \frac{l}{S}$

Tento vztah je např. v učebnici [3] (viz s. 61) konstatován s tím, že je možné jej experimentálně odvodit na základě dříve popsaného pokusu. V první ukázce toho, jak by mohl probíhat rozhovor učitele (U) se žáky (Ž), uvádíme v podstatě autentickou ukázku z výuky (sexta osmiletého gymnázia).

U (*na úvod*): Zamyslíme se společně, jak souvisí odpor vodiče, třeba kovového drátu, s jeho vlastnostmi. Aby se vám lépe přemýšlelo, tak si můžeme místo drátu představit potrubí a místo elektrického proudu vodu tekoucí tímto potrubím.
U (*pokračuje*): Představte si potrubí, kterým protéká voda, neboli kovový drát, kterým teče elektrický proud. Bude větší odpor kladen na kratším, nebo na delším úseku?
Ž1: Asi na delším úseku.
U: A proč? Uměl bys to nějak zdůvodnit?
Ž1: Tak když něco brání vodě nebo elektrickému proudu na nějakém

úseku, tak na dvojnásobném úseku toho bude bránit víc, dvakrát, ne?
U (*k ostatním žákům*): Přijde vám logické, že na delším úseku, na větší vzdálenosti, je vodě nebo elektrickému proudu postaveno do cesty více překážek než na krátkém úseku?
Ž2: Jo, tak je to něco takového, jako když pojedu autem, tak čím dál pojedu, tím spíš se srazím s jiným autem nebo se stromem.
U: To je zajímavé přirovnání. V kovu je to zhruba tak, že elektrony, které tvoří elektrický proud, narážejí do iontů krystalové mřížky. Je to samozřejmě složitějším, protože ionty nejsou nehybné, ale kmitají. Když byste se měli rozhodnout, jestli je na základě toho, co jsme tu spolu vymysleli, elektrický odpor buď přímo, nebo nepřímo úměrný délce drátu, vodiče, pro co byste se rozhodli?
Ž3: Že je přímo úměrný. Čím větší délka, tím větší odpor.
U: Dobře. To můžeme napsat matematicky takto... *Učitel napíše na tabuli* $R \sim l$ *a případně to dále okomentuje.*
U: Tak teď se zamyslíme, jak by mohl záviset elektrický odpor na obsahu průřezu vodiče. Představte si několik stejných potrubí s vodou vedle sebe. Moje otázka je, jestli proteče více vody jedním potrubím nebo několika takovými potrubími dohromady.
Ž4: To je jasné. Jedním potrubím proteče za sekundu nějaké množství vody, dvěma potrubími, která jsou stejná, proteče dvojnásobné množství a tak dále. Takže čím víc stejných potrubí vedle sebe, tím víc vody.
U: Dobře. A teď si představte, že několik takových potrubí, která jsou vedle sebe, spojíme; zbavíme se jejich stěn. Vznikne tak jedno potrubí s větším průřezem. Kolik jím proteče vody ve srovnání s jedním původním potrubím?
Ž5: No, víc. Prostě stejně jako těmi několika potrubími dohromady.
U: Fajn. A když tedy proteče více vody tlustějším potrubím, potrubím s větším obsahem průřezu, jak to bude s elektrickým proudem a odporem?
Ž5: Větší proud znamená menší odpor, takže tlustější bude mít menší odpor.
U: Dobře. Když byste se měli zase rozhodnout, jestli je na základě toho, co jsme tu spolu vymysleli, elektrický odpor buď přímo, nebo nepřímo úměrný obsahu průřezu vodiče, pro co byste se rozhodli?
Ž6: Že je nepřímo úměrný. Čím větší průřez, tím menší odpor.
U: Dobře. To můžeme napsat matematicky takto... *Učitel napíše na tabuli* $R \sim \frac{1}{S}$ *a případně podá další komentář.*

U (shrnuje): Tak zatím jsme si tady v našich myšlenkách odvodili, že elektrický odpor je přímo úměrný délce vodiče a nepřímo úměrný obsahu jeho průřezu. Uměli bychom oba dva vztahy spojit do jednoho? (*Po další případné diskuzi učitel napíše vztah* $R \sim \frac{l}{S}$).
U (*pokračuje*): Víte, jak by se to dalo zapsat do rovnice?
Ž7: $R = \frac{l}{S}$.
U: Není to úplně špatný nápad, ale takhle to být nemůže. Zamyslete se nad fyzikálními jednotkami odporu na levé straně rovnice a podílu délky a obsahu na druhé. Něco tam nehraje.
Ž8: Na pravé straně rovnice musí být ještě něco, co má jednotku $\Omega \cdot \mathrm{m}$.
U: Správně. Taková veličina souvisí ještě s další vlastností vodiče, na které závisí jeho odpor. Už jsme tu měli závislost na délce a obsahu průřezu...
Ž9: Třeba na tom, z čeho drát je.
U: Zkus to doplnit, jak to myslíš?
Ž9: No, z jakého je materiálu.
U: Dobře. Odpor bude asi záviset kromě délky a obsahu průřezu také na materiálu, ze kterého je vodič vyroben. Celkově můžeme psát, že $R = \varrho\frac{l}{S}$. (*Následuje výklad o měrném elektrickém odporu* ϱ.)
U: Vztah, který jsme tady myšlenkově odvodili pro elektrický odpor vodiče, skutečně platí. Dá se o tom přesvědčit experimenty. Právě experimenty nakonec rozhodují, jestli jsou takové úvahy, které jsme tu prováděli, správné nebo ne. Tady správné jsou. Zdaleka ne každý fyzikální vztah se dá takhle v úvahách odvodit, ale někdy to jde. Pro vás může být užitečné také to, že pokud si nebudete jisti, jestli si rovnici pamatujete správně, tak když si vzpomenete na úvahy, které jsme tu provedli, může vám to pomoci k jejímu vybavení.

3 Odvození vztahu pro teplo $Q = cm\Delta t$

Uvedený vztah pro výpočet tepla je v učebnici [4] na s. 52 odvozen na základě definice měrné tepelné kapacity. Její pochopení dělá žákům často problémy. Následující myšlenkové odvození můžeme tedy chápat jako určitou alternativu k tomuto postupu. V tomto a dalších případech uvádíme už jen zkrácené verze rozhovorů (s důležitými momenty).

Co se stane s teplotou, když tělesu dodám teplo (předpokládáme, že těleso nezmění svoje skupenství atd.)?
$\longrightarrow$ Teplota se zvětší.
Bude tedy teplo dodané tělesu přímo, nebo nepřímo úměrné změně teploty?
$\longrightarrow$ Přímo úměrné.

Jak můžeme tuto skutečnost zapsat?
$\longrightarrow Q \sim \Delta t$
Když budeme chtít zahřát např. o 20 °C těleso z určité látky o hmotnosti 100 g a těleso ze stejné látky o stejnou teplotu s hmotností 200 g, ve kterém případě musíme dodat více tepla?
$\longrightarrow$ Více tepla musíme dodat těžšímu tělesu.
Je tedy dodané teplo přímo, nebo nepřímo úměrné hmotnosti?
$\longrightarrow$ Přímo úměrné.
Jak to můžeme zapsat?
$\longrightarrow Q \sim m$
Na čem dalším by mohlo záviset teplo, které musím dodat tělesu, aby se ohřálo o určitou teplotu?
$\longrightarrow$ Na tom, z jaké je látky.
Dejme tomu, že takovou vlastnost vyjadřuje veličina označená jako c. Jak by potom šlo zapsat všechny tři poznatky do jedné rovnice?
$\longrightarrow Q = cm\Delta t$
Následuje komentář tohoto vztahu a vysvětlení měrné tepelné kapacity c.

4 Odvození vztahu pro délkovou teplotní roztažnost $\Delta l = \alpha l_1 \Delta t$

Poznatek vyjádřený tímto vztahem je uveden v učebnici [4] na s. 141 a 142 jako experimentální zjištění.

Na čem by mohlo záviset prodloužení tyče při zahřívání?
$\longrightarrow$ Na teplotě.
Prodlouží se tyč více, když ji zahřejeme o 10 °C nebo o 20 °C?
$\longrightarrow$ O 20 °C.
Bude prodloužení přímo, nebo nepřímo úměrné změně teploty?
$\longrightarrow$ Přímo úměrné.
Můžeme psát $\Delta l \sim \Delta t$
Prodlouží se při určitém zvýšení teploty více metrová nebo dvoumetrová tyč?
$\longrightarrow$ Dvoumetrová tyč.
Bude tedy prodloužení přímo, nebo nepřímo úměrné délce tyče?
$\longrightarrow$ Přímo úměrné.
Můžeme psát $\Delta l \sim l_1$.
Jak můžeme zapsat, že prodloužení tyče je přímo úměrné jak změně teploty, tak délce tyče?
$\longrightarrow \Delta l \sim l_1 \Delta t$ (např. sčítání veličin na pravé straně je vyloučeno, protože veličiny mají různé jednotky a takové nelze sčítat).
Můžeme zapsat, že $\Delta l = l_1 \Delta t$?

$\longrightarrow$ Nemůžeme, protože součin na pravé straně rovnice má jinou fyzikální jednotku než veličina na levé straně.
Rovnici tedy doplníme na $\Delta l = \alpha l_1 \Delta t$. S čím by mohl souviset součinitel α?
$\longrightarrow$ S tím, z jakého materiálu je tyč.
Následuje diskuze teplotního součinitele délkové roztažnosti α a platnosti vztahu $\Delta l = \alpha l_1 \Delta t$.

5 Odvození vztahu pro magnetickou indukci pole přímého vodiče $B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{d}$

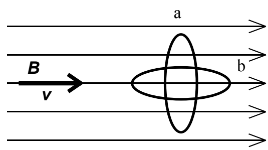
S tímto vztahem se můžeme setkat např. v učebnici [3] na s. 139, kde je uveden s tím, že jeho odvození není jednoduché. (Odvodit se dá z Ampérova zákona a při odvozování je třeba integrovat, viz [5], s. 780-782.)

Na čem by mohla záviset velikost magnetické indukce pole (obdoba „intenzity“ magnetického pole), které vzniká v okolí vodiče s proudem?
$\longrightarrow$ Na elektrickém proudu, jeho velikosti. V okolí vodiče, kterým neteče elektrický proud, magnetické pole nevznikne, zatímco když poteče vodičem velký proud, vznikne silné pole a magnetická indukce bude mít vysokou hodnotu.
Bude tedy velikost magnetické indukce přímo, nebo nepřímo úměrná elektrickému proudu?
$\longrightarrow$ Přímo úměrná.
Můžeme psát $B \sim I$.
Na čem dalším by mohla záviset velikost magnetické indukce? Zamyslete se nad různými místy prostoru kolem vodiče.
$\longrightarrow$ Na vzdálenosti. Ve větší vzdálenosti bude menší, pole bude slabší.
Bude tedy velikost magnetické indukce přímo, nebo nepřímo úměrná vzdálenosti od vodiče?
$\longrightarrow$ Nepřímo úměrná.
Můžeme psát $B \sim \frac{1}{d}$.
Jak můžeme zapsat, že velikost magnetické indukce je přímo úměrná elektrickému proudu a nepřímo úměrná vzdálenosti daného místa od vodiče?
$\longrightarrow B \sim \frac{I}{d}$.
Následuje diskuze konstanty úměrnosti $\frac{\mu}{2\pi}$ a výsledného vztahu $B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{d}$.
Je možné také zmínit, že ve jmenovateli je vlastně délka magnetické indukční čáry, která prochází daným bodem ve vzdálenosti d od vodiče.

6 Odvození vztahu pro magnetický indukční tok $\Phi = BS\cos\alpha$

Magnetický indukční tok patří mezi veličiny, které jsou zvlášť náročné na představivost žáků. Obdobně jako v oddílu 2 při odvozování vztahu pro odpor vodiče je možné použít analogii s tekoucí vodou. Magnetický indukční tok je zaveden bez odvození např. v učebnici [3] na s. 160. V následujícím opět uvádíme možný postup při myšlenkovém odvozování tohoto pojmu.

Vyjdeme z analogie. Místo magnetického pole a magnetických indukčních čar si představíme vodu a její proudnice. Místo vektoru magnetické indukce si budeme myslet rychlost.



Obr. 1

Vymyslete, jak umístit kruhovou plochu do magnetického pole („proudu vody"), aby byl tok magnetické indukce co největší (aby proteklo co nejvíce vody)?

$\longrightarrow$ Plocha musí být kolmo k magnetické indukci (obr. 1, poloha a), tj. normála (kolmice k ploše) ve směru indukce (splývá s magnetickou indukční čarou).

Jaký je tedy v tomto případě úhel mezi normálou a magnetickou indukcí?

$\longrightarrow 0°$

Existuje taková poloha plochy, aby jí nic neprotékalo?

$\longrightarrow$ Poloha, kdy je kruhová plocha ve směru indukčních čar, neboli normála je kolmo k magnetické indukci, tj. svírají úhel 90° (obr. 1, poloha b).

Znáte nějakou funkci z matematiky, aby pro úhel 90° dala 0 a pro 0° byla maximální?

$\longrightarrow$ Kosinus.

Čemu a jak (přímo, nebo nepřímo) úměrný bude magnetický indukční tok Φ?

$\longrightarrow \Phi \sim \cos\alpha$

Jak by se dal magnetický indukční tok zvětšit a jak to můžeme zapsat?

$\longrightarrow$ Tím, že se zvětší obsah plochy; $\Phi \sim S$

Čím ještě by se dal tok zvětšit? Představte si tekoucí vodu.

$\longrightarrow$ Zvětšením rychlosti vody, tj. zvětšením velikosti magnetické indukce.

Můžeme to zapsat jako $\Phi \sim B$.
Napište všechno, na co jsme přišli, do jedné rovnice.
$\longrightarrow \Phi = BS \cos \alpha$

7 Závěr

Výše bylo uvedeno pět příkladů myšlenkového odvozování veličinových rovnic. Z příkladů je jasné, že uvedený přístup má svá omezení. Jednoduché úvahy využívané při tomto způsobu odvozování umožňují sice rozhodnout, zda bude daná veličina spíše přímo než nepřímo úměrná jiné, neumožňují ovšem rozlišit např. pokles dané veličiny s první a se druhou mocninou vzdálenosti. Je třeba si uvědomit, že učitel při tomto způsobu výuky řídí práci žáků, často jim dává na vybranou mezi určitými alternativami, a do jisté míry je tak vmanipulovává do určitých rozhodnutí. I když je v tomto bodě naznačený přístup problematický, domníváme se, že podporuje u žáků provádění žádoucích myšlenkových operací a vede k méně mechanickému osvojování znalostí.

Diskutované příklady jsou uvedeny jako návrhy pro učitele, kteří by chtěli takovýto přístup ve své výuce využít. Byly opakovaně využity a ověřeny při výuce na gymnáziu; tam byla schopna většina žáků tímto způsobem pracovat. Obecně lze říci, že tento způsob práce je pro žáky při prvním setkání náročnější a při jeho opakované realizaci se stává schůdnějším.

Naznačený přístup chápeme jako alternativu k jiným. Především by nemělo dojít k omezení odvozování fyzikálních zákonitostí a vztahů z reálných experimentů. Tam, kde to je možné (zejména dostatek času a vhodné materiální vybavení), je tento přístup velmi cenné využít. Dále se domníváme, že je velmi žádoucí odvozovat veličinové rovnice („vzorečky“) z obecnějších poznatků, pokud není postup např. příliš zdlouhavý a matematicky náročný.

Literatura

[1] *Svoboda, E. – Kolářová, R.*: Didaktika fyziky základní a střední školy. Praha: Karolinum, 2006.
[2] *Dvořák, L.* a kol.: Lze učit fyziku zajímavěji a lépe? Praha: Matfyzpress, 2008.
[3] *Lepil, O. – Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia: Elektřina a magnetismus. Praha: Prometheus, 2006.
[4] *Bartuška, K. – Svoboda, E.*: Fyzika pro gymnázia: Molekulová fyzika a termika. Praha: Prometheus, 2006.
[5] *Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.*: Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky, část 3. Brno, Praha: Vutium, Prometheus, 2006.

Modelujeme perpetuum mobile programem Phun

JAROSLAV KOREŠ

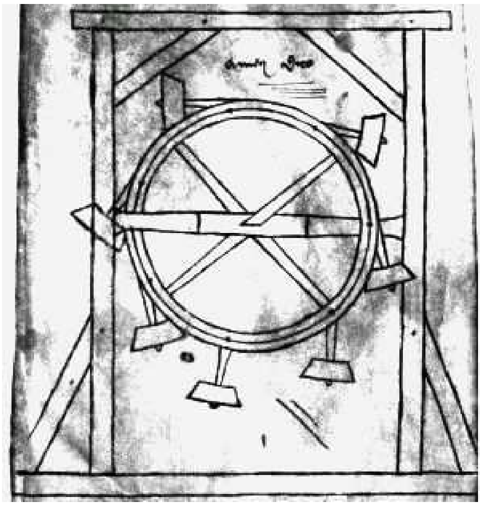
Gymnázium Jana Valeriána Jirsíka, České Budějovice

Perpetuum mobile (PM) je klasické téma jak mechaniky, tak i termodynamiky. I když nemožnost jeho sestrojení je dávno potvrzena, stále se nacházejí noví konstruktéři se svým – zaručeně funkčním – strojem, umožňujícím vyrábět energii z ničeho. Ani žáci nemají v pojmu PM jasno, často jej redukují na něco, co je v neustálém pohybu. Tomuto chápání napomáhá i doslovný překlad: Perpetuum mobile znamená „věčně v pohybu" [1] tedy stroj, který se nikdy nezastaví, i když mu není dodávána energie. Takové zařízení však není v žádném rozporu s fyzikálními zákony. Pokud např. roztočíme setrvačník ve vakuu, bude stále rotovat. Zde je potřeba zdůraznit, že se nejedná se o stále se pohybující stroj, ale o stroj, který je schopen vykonávat více práce, než je mu dodáváno energie. To je zásadní a současně žáky nejvíce nepochopená vlastnost PM. Právě na tento aspekt bude v dalším pokračování článku zaměřena pozornost.

Vedle klasického PM, konajícího práci bez dodávání energie, byl *W. Ostwaldem* zaveden pojem PM 2. druhu. To je stroj, který by v rozporu s 2. zákonem termodynamiky cyklicky získával práci jen ochlazováním okolních těles, tj. se 100procentní účinností měnil teplo v mechanickou práci. V tomto článku se budeme zabývat pouze klasickým PM, nazývaným též PM 1. druhu.

„Věčným pohybem" se v historii zabývalo mnoho lidí, ať učených či bez vzdělání [2]. Jako první zmínil věčně pracující stroj indický astronom a matematik *Bhäskara II* (12. století) [3]. Nejspíše z jeho práce čerpal *Villard de Honnecourt* (13. století) [3] [4], který načrtl konstrukci PM na obr. 1. Od té doby se stala snaha o sestrojení věčně se pohybující stroje náplní práce mnoha lidí, včetně známých vědců (*Robert Boyle*, *Johann Bernoulli*). I když formulace zákona zachování energie ve formě 1. zákona termodynamického jasně poukazuje na nemožnost sestrojení PM, přesto práce na návrzích PM nepřestávají, pouze se do jeho konstrukcí více zapojují prvky moderní vědy, které ovšem autoři správně nepochopili, nebo se přímo dopouštějí podvodu.

Ostatně s podvodníky je historie PM pevně svázána, snad nejznámějším podvodníkem je Němec *Karel Eliáš Bessler-Orffyreus* (1680–1745) [3] [4] (i když některé zdroje tvrdí pravý opak – že jako jediný sestrojil funkční PM a své tajemství si odnesl do hrobu). Po úspěchu s modelem PM, který Bessler sestrojil „doma“, již jako Orffyreus, dostal na dvůr hraběte hessensko-kasselského Karla. Tam roku 1717 sestrojil tajemný mechanismus, který setrvával ve stálém pohybu. I když bylo možné si stroj prohlédnout, Bessler nikomu nedovolil jej podrobně zkoumat. Avšak přesto, že si jej nemohli zevrubně prohlédnout, označili jej pozvaní vědci za PM. O tento stroj projevil zájem i ruský car Petr I., který se však nedožil odhalení pravdy – stroj poháněli střídavě Besslerův bratr a jeho služebná. Ta celý podvod prozradila. Součástí každého falešného PM vždy byla skrytá technika dodávání energie, kompenzující ztráty při provozu.



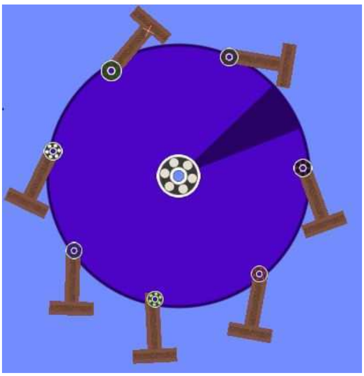
Obr. 1 (Zdroj [5])

K vysvětlení pojmu PM a k demonstraci jeho nereálnosti lze ve výuce s úspěchem využít program Phun [6], nebo jeho komerční verzi Algodoo [7]. Programy jsou určeny k simulaci fyzikálních dějů. Pro nás je důležité, že v nich lze jednoduše simulovat i mechanické stroje. Pracuje se v přehledném a intuitivním grafickém prostředí, k ovládání stačí pouze myš, není třeba programovací jazyk [8].

Protože Phun pracuje pouze s mechanickými veličinami, zaměříme se na mechanická PM. Žáci se často ptají, zda by PM mohlo fungovat, kdyby neexistovalo tření či odpor vzduchu. Tyto ztráty vnímají jako jedinou překážku k jeho sestrojení. Ostatně to je i časté zdůvodnění tvůrců PM, proč stroj nefunguje podle jejich představ. Paradoxně popularitě PM přispělo i to, že návrhy často zůstávaly pouze na papíře. Důležitou vlastností Phunu je možnost nastavení ideálních podmínek (dokonalá pružnost, nulové tření a nulový odpor vzduchu). Lze tak snadno předvést, že problém PM není v nedokonalé technologii, ale v tom, že takový stroj nelze sestrojit z principiálních důvodů.

Na ukázku vybereme několik historických návrhů. Vytvoření každého modelu trvalo cca 5 minut. Hotové modely s komentářem je možné stáhnout z adresy [9].

Příklad 1

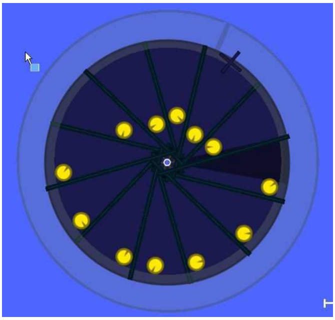


Obr. 2

Autorem je *Villard de Honnecourt* [2] [3] [4], princip je založen na nerovnováze sil – na začátku pohybu je levá část kruhu zatížena více než pravá, moment sil levé strany bude větší než moment na pravé straně, kolo se tedy začne otáčet. Připevněná kladiva se budou v horní poloze v tíhovém poli překlápět a podle autorovy domněnky budou svými údery kolo dále roztáčet. V Phunu se přesvědčíme, že i když odstraníme tření a odpor vzduchu, kolo se vždy zastaví v poloze se čtyřmi kladivy dole a třemi nahoře.

Realizace: V Phunu nakreslíme kruh a jeho střed připevníme pomocí čepu k pozadí. Tak se bude kolo moci volně otáčet. Zafixujeme dva obdélníky tak, aby vytvořily kladivo. Abychom si zjednodušili práci, vytvořené kladivo šestkrát zkopírujeme. Všech sedm kladiv pomocí čepů připevníme ke kružnici. Konstrukce je hotová, stačí jen zapnout simulaci a roztočit kolo. Kdykoliv můžeme měnit materiálové vlastnosti – hlavně koeficient tření a pružnost. Stejně tak můžeme vypnout odpor vzduchu a tření.

Příklad 2

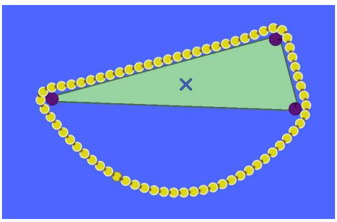


Obr. 3

Toto PM navrhl Angličan *Edward Sommerset* (1601–1667) [2]. Jde o další příklad perpetua mobile, pracujícího na principu nerovnováhy sil. Protože horní koule budou blíže k ose otáčení a spodní koule jsou nerovnoměrně rozloženy, očekával autor po rozhýbání stroje trvalé setrvání v tomto pohybu. Tento stroj předvedl králi Karlu I [3]. I když stroj je detailně popsán, výsledek demonstrace bohužel zaznamenán nebyl. Při nastavení ideálních podmínek budou žluté koule nahodile skákat a tak odebírat část pohybové energie kola. Pokud koule nebudou dokonale pružné, kolo se po určité době úplně zastaví.

Realizace: Opět pomocí čepu připevníme kruh k pozadí. Pomocí nástroje pro kreslení nakreslíme radiální paprsky podle obrázku. Vzniknou nám tak trojúhelníky, do kterých vložíme koule. Jako v prvním případě vypneme odpor vzduchu a nastavíme pružnost přepážek a kuliček. Ať uvedeme kolo do pohybu jakýmkoliv směrem, jeho pohyb se po určité době zastaví.

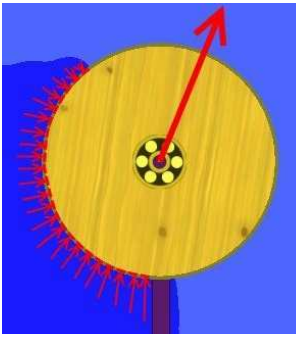
Příklad 3



Obr. 4

Autor tohoto návrhu, vlámský vědec *Simon Stevinus* (1548–1620), intuitivně vycházel z předpokladu, že PM není možné [3]. Z toho odvodil vztah pro rozklad sil na nakloněné rovině [2]. Realizace: Nakreslíme obdélník a pomocí nástroje nůž jej rozřízneme na dva trojúhelníky. Jeden z nich zafixujeme k pozadí, druhý vymažeme. I když v návrhu autora nejsou v rozích umístěny kladky, můžeme je tam pomocí čepů připevnit, alespoň zamezíme drhnutí řetězu o hrany. Nakreslíme řetěz se spojeným začátkem a koncem. Nastavíme tření trojúhelníka a řetězu na nulu, pružnost obou nastavíme na jedna a vypneme odpor vzduchu. Ani tak se řetěz samovolně nerozhýbe, k trvalému pohybu nebo dokonce ke konání práce nepomůže ani jeho postrčení.

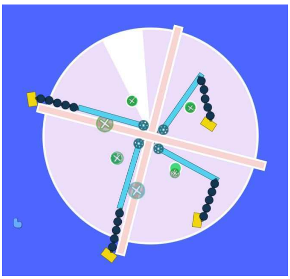
Příklad 4



Obr. 5

Hydrostatické PM[3]. Autor předpokládal, že kolo částečně ponořené do vody se vlivem vztlakové síly působící vzhůru roztočí. K tomu samozřejmě nedojde – vztlaková síla sice působí, ale v ose otáčení a tudíž nebude mít otáčivý účinek. Směr vztlakové síly je určen výslednicí jednotlivých hydrostatických sil, působících na ponořené kolo. Ty jsou na obrázku vyznačeny červeně – je vidět, že jejich velikost se mění s hloubkou a směr působení je do středu kruhu. Výhodou Phunu je možnost idealizace – praktické sestrojení takového stroje by bylo jistě komplikované, stroj by měl být dokonale uzavřený, aby z něj voda neodtékala. Protože v Phunu je voda simulována jako soustava jednotlivých molekul, uvidíme, že kolo se bude nahodile pootáčet. Tyto fluktuace, způsobené nepravidelnými nárazy molekul vody na kolo, jsou ve skutečnosti pro velký počet srážek nepozorovatelné.

Příklad 5



Obr. 6

Vzorem pro tento model byla animace stále rotujícího kola na stránkách http://www.orffyre.com/speculation.html, zabývajících se prací *Karla Eliáše Besslezra* (*Orffyrea*). Kolo je další variací na první příklad. Ani v ideálním případě nedodá kolo více energie, než dostalo při rozpohybování. Pokud budou všechny části dokonale pružné, dojde k jejich rozkmitání a tudíž ke zpomalení pohybu samotného kola.

Vhodné ve výuce je porovnání všech zde diskutovaných strojů s rotujícím kotoučem – i ten se bude „věčně pohybovat“, nebude-li docházet ke ztrátám. Avšak pokud bychom jej chtěli využít ke konání práce, začne se zpomalovat. Na závěr tak můžeme pouze konstatovat, že mnoho úsilí bylo a nejspíše ještě bude zbytečně vynakládáno k hledání mechanismů, které v ideálním případě napodobují rotující kolo.

Phun je jedním z mála autorských nástrojů, které umožňují jednoduchou simulaci strojů. I přes snadnou dostupnost již hotových animací či videí, provedených např. ve Adobe Flash, modely vytvořené v Phunu působí realističtěji. Pouhá vizuální demonstrace, byť profesionálně zpracovaná, nemusí být pro žáky tak přesvědčivá jako simulace, která sice svým grafickým provedením poněkud zaostává, ale na jejíž tvorbě nebo úpravě mají možnost se podílet. Velkou výhodou Phunu je jednoduché a intuitivní ovládání, k vytváření i složitějších simulací není zapotřebí znalost programování. Žáci tak mají možnost sledovat každý krok tvorby animace.

S využitím Phunu ve výuce fyziky mám již praktické zkušenosti [8]. Při testování zde uváděných modelů PM jsem žáky nejdříve seznámil s představou tvůrce daného PM a na již hotové simulaci diskutoval, co a proč se děje. Poté jsem pozměnil některé podmínky a opět s žáky probíral funkci stroje. Nakonec jsme debatovali o tom, jak stroj „vylepšit", abychom z něj skutečně vytvořili funkční PM. Některé návrhy jsme realizovali, abychom nakonec dospěli k závěru, že stroj fungovat nebude. Žáci byli mnohem aktivnější a v diskuzi jsme se dostali i k tématům, které z fyzikálního pohledu jsou velmi důležité (moment sil, vztlak), a v kterých žáci neměli úplně jasno. „Hrátky" s Phunem umožnily komplexní fyzikální výklad, zahrnující několik témat najednou. Navíc výuka nebyla „o fyzice", ale „o strojích". Obávaná fyzika stála jakoby v pozadí – žáci aplikovali fyzikální znalosti na řešení technických problémů. Výklad se simulacemi bude pro žáky atraktivnější, připravené animace lze snadno modifikovat a v porovnání s jinými autorskými nástroji (Flash, Java) je tvorba modelů podstatně jednodušší a rychlejší.

Literatura

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Perpetual_motion
[2] *Perpetual Motion*: The History of an Obsession: Arthur W. J. G. Ord-Hume
[3] http://www.hp-gramatke.net/perpetuum/english/page0220.htm
[4] http://www.lhup.edu/~dsimanek/museum/people/people.htm
[5] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/Perpetuum_mobile_villard_de_honnecourt.jpg
[6] http://www.phunland.com/wiki/Home
[7] http://www.algodoo.com/wiki/Home
[8] www.algodoo.com/wiki/Tutorials
[9] http://bit.ly/9J9GIh
[10] http://www.algodoo.com/algobox/
[11] *Koreš, J., Straka, J.*: Phun a simulace ve fyzice, MFI roč. 19 (2009), č. 4, s. 212.

INFORMATIKA

Vesmírné cestování
(Úlohy z MO – kategorie P, 29. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Seznámíme vás s další zajímavou úlohou z Matematické olympiády – kategorie P, tentokrát z domácího kola 55. ročníku soutěže (školní rok 2005/2006). Všechny soutěžní úlohy tohoto ročníku připravili pracovníci Fakulty matematiky, fyzika a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě, kteří se starají o programátorskou olympiádu středoškoláků na Slovensku. Budeme se věnovat jedné zdánlivě běžné úloze z teorie grafů – hledání nejkratší cesty v ohodnoceném orientovaném grafu. Podstatnou komplikací oproti běžným „školním“ úlohám však bude skutečnost, že hrany našeho grafu mohou být ohodnoceny i zápornými čísly. Nejprve se jako obvykle podíváme na úplné zadání úlohy, které si pro potřeby našeho článku trochu upravíme a zkrátíme, aniž bychom tím ovšem změnili smysl původní úlohy.

⋆ ⋆ ⋆

Vědcům se konečně podařilo vymyslet efektivní způsob cestování v časoprostoru. Jejich testovací středisko se skládá z několika lokalit, v každé lokalitě je umístěno několik teleportů. Když vstoupíme do takového teleportu, přemístí nás na stanovenou lokalitu a zároveň nás přemístí také v čase o stanovený počet minut (buď dopředu nebo dozadu). Cílová lokalita i časový posun jsou pro každý teleport pevně nastaveny. Vědci by chtěli zjistit, jak je cestování pomocí teleportů výhodné. Právě se nacházejí u centrálního počítače a chtěli by se jít nasvačit do bufetu. A protože čas jsou peníze, chtěli by být v bufetu co nejdříve. Pohybovat se v čase a prostoru samozřejmě chtějí jen pomocí již postavených teleportů.

Soutěžní úloha:

Program dostane na vstupu počet lokalit N, které budeme označovat čísly od 1 do N. Centrální počítač je umístěn v lokalitě číslo 1, bufet má číslo N. Následuje celkový počet postavených teleportů M a seznam těchto teleportů. Pro každý teleport je určena počáteční lokalita, koncová lokalita a změna času v minutách, jež nastane při průchodu tímto teleportem (kladné číslo znamená posun do budoucnosti, záporné do minulosti a 0 znamená, že se v koncové lokalitě ocitneme ve stejném čase, v jakém jsme nastoupili do teleportu). Každý teleport lze použít jen tím směrem, který je uveden na vstupu. Mezi dvěma lokalitami může být vybudováno více teleportů. Dokonce může existovat i teleport, který nás přesune pouze v čase (tedy počáteční a koncová lokalita jsou u něj totožné). Program má určit čas, kdy nejdříve se můžeme dostat do lokality N, jestliže se v lokalitě 1 nacházíme v čase 0. Pokud tam dokážeme být libovolně brzo (tzn. můžeme pomocí teleportů cestovat neomezeně do minulosti), nebo pokud se tam vůbec nemůžeme dostat, program o tom vydá příslušnou zprávu.

Formát vstupu:

První řádek vstupního souboru `teleport.in` obsahuje dvě čísla N a M ($2 \leq N \leq 1.000$, $0 \leq M \leq 50.000$) oddělená mezerou. Následuje M řádků, na každém z nich jsou tři čísla A_i, B_i, T_i ($1 \leq A_i$, $B_i \leq N$, $|Ti| \leq 10.000$) popisující teleport z lokality A_i do lokality B_i se změnou času T_i minut.

Formát výstupu:

Jediný řádek výstupního souboru `teleport.out` bude obsahovat zprávu „Vedci umrou hlady", jestliže se od centrálního počítače pomocí teleportů vůbec nedá dostat do bufetu, resp. zprávu „Vedci poznaji vznik vesmiru", jestliže můžeme cestovat do nekonečna do minulosti. Jinak bude výstup obsahovat jedno celé číslo představující čas v minutách, kdy nejdříve se vědci dokážou dostat do bufetu.

Příklady:

```
teleport.in
3 4
1 2 5
2 3 -7
1 3 -1
```

```
1 3 16
```

```
teleport.out
-2
```

Prvním teleportem se vědci dostanou do lokality 2 *v čase* 5*, odtud druhým do lokality* 3 *v čase* $5 + (-7) = -2$*. Ostatní možnosti jsou horší.*

```
teleport.in
2 2
1 1 -1
1 2 0
```

```
teleport.out
Vedci poznaji vznik vesmiru
```

Dříve než se vědci druhým teleportem přesunou do bufetu, mohou prvním odcestovat libovolně daleko do minulosti.

```
teleport.in
4 3
1 2 -1
2 3 0
4 3 10
```

```
teleport.out
Vedci umrou hlady
```

Poslední teleport nemohou vědci použít na přesun z lokality 3 *do lokality* 4*, jedině naopak.*

⋆ ⋆ ⋆

Jistě vás hned napadne, že situaci ze zadání úlohy si můžeme představit jako ohodnocený orientovaný graf. Vrcholy grafu budou představovat lokality, hrany reprezentují teleporty mezi lokalitami. Každá hrana je ohodnocena číslem, které určuje posun v čase při průchodu danou hranou. Toto ohodnocená budeme nazývat „délka hrany“, jak je v grafové terminologii obvyklé, i když v našem případě nepůjde o délku v obvyklém slova smyslu. Úkolem je najít sled vedoucí z vrcholu 1 do vrcholu N s nejmenším součtem ohodnocení hran (nazveme ho nejkratší), případně vypsat zprávu, že takový sled neexistuje. Pro úplnost dodejme, že v teorii grafů sledem rozumíme posloupnost vrcholů $v_1, \dots, v_k$ takovou, že mezi vrcholy v_i a v_{i+1} vede hrana.

V úvodu si můžeme úlohu trochu zjednodušit. Uvědomte si, že pokud mezi dvěma vrcholy vede více hran stejným směrem, stačí uvažovat jenom tu z nich, která má nejmenší délku. Jinak bychom totiž dokázali nalezený sled zkrátit výměnou delší hrany za kratší. Případných násobných hran se zbavíme nejraději hned při načítání vstupních dat, abychom nemuseli ani řešit jejich uložení v datové struktuře.

Kdyby byly všechny hrany grafu ohodnoceny nezáporně, byla by naše úloha velmi snadná. V takovém případě se při hledání nejkratšího sledu jistě nevyplatí vracet se do vrcholu, který jsme už jednou navštívili. Sled, ve kterém se žádné vrcholy neopakují, nazýváme v grafové terminologii cesta, a na nalezení nejkratší cesty v ohodnoceném grafu máme k dispozici standardní algoritmy, které najdete v každé základní učebnici teorie grafů. Nejznámější z nich je Dijkstrův algoritmus. Jeho použitelnost je však omezena právě jen na grafy s nezáporným ohodnocením hran.

Nadále tedy budeme počítat s tím, že náš graf může obsahovat i hrany se zápornou délkou. Mohou nastat dvě situace, kdy nejkratší sled z vrcholu 1 do vrcholu N neexistuje. Buď se z vrcholu 1 do vrcholu N po hranách grafu nemůžeme vůbec dostat, nebo existuje sled z vrcholu 1 do vrcholu N takový, že obsahuje cyklus se záporným součtem délek hran. Po takovém cyklu pak můžeme chodit pořád dokola a stále snižovat celkovou délku sledu. Proto ani neexistuje nejkratší sled – ke každému sledu totiž dokážeme nalézt sled kratší.

Ukážeme si dva různé algoritmy, které efektivně řeší naši úlohu. V obou případech se jedná o standardní algoritmy, i když trochu méně známé, než již zmíněný algoritmus Dijkstrův. První řešení využívá **Floydův-Warshallův algoritmus**. Tento algoritmus je založen na myšlence dynamického programování a slouží k výpočtu nejkratších vzdáleností mezi všemi dvojicemi vrcholů v grafu. Výhodou pro nás je, že mu nevadí ani záporná ohodnocení hran. Graf si uložíme do dvojrozměrného pole G, přičemž výchozí hodnota G$[i, j]$ bude rovna délce hrany z vrcholu i do vrcholu j (nebo nekonečno, jestliže taková hrana neexistuje). Algoritmus vypadá následovně:

```
for k:=1 to N do
   for i:=1 to N do
      for j:=1 to N do
```

```
        if G[i, j] > G[i, k] + G[k, j] then
           G[i, j] := G[i, k] + G[k, j];
```

Po skončení výpočtu je hodnotou $G[i, j]$ délka nejkratšího sledu z i do j (případně nekonečno, pokud žádný takový sled neexistuje). Navíc platí, že je-li $G[i, i]$ záporné pro určité i, pak vrchol i leží na nějakém záporném cyklu. Pokud tento vrchol leží na nějakém sledu z 1 do N (tedy $G[1, i]$ ani $G[i, N]$ nejsou rovny nekonečnu), potom existuje sled z 1 do N s libovolně nízkým ohodnocením.

Jak jsme již uvedli, popsaný algoritmus je založen na principu dynamického programování. Dynamika zde probíhá přes postupně rostoucí množinu vrcholů, které smíme použít v hledaném sledu minimální délky. Po k-tém průchodu vnějšího cyklu udávají hodnoty $G[i, j]$ délku nejkratšího sledu z i do j takového, že tento sled vede pouze přes (ne nutně všechny) vrcholy z množiny $\{1, \ldots, k\}$. V každém kroku výpočtu musíme přepočítat všech N^2 hodnot $G[i, j]$, i když nakonec po posledním N-tém průchodu nás bude v této úloze zajímat pouze jediná z nich, a to $G[1, N]$.

Ze zápisu algoritmu je zjevné, že časová složitost tohoto algoritmu je $O(N^3)$. Výpočet je totiž tvořen třemi do sebe vnořenými cykly, z nichž každý se vykoná N-krát. Přitom tělo vnitřního cyklu má již konstantní časové nároky. Paměťová složitost je $O(N^2)$, neboť vystačíme s jedním polem G velikosti $N \times N$ na uložení výchozího grafu, ukládání všech mezivýsledků i na uložení výsledných nejkratších délek.

Ukážeme si ještě druhé řešení úlohy, které využívá **Bellmanův-Fordův algoritmus**. Jedná se o standardní grafový algoritmus, který podobně jako Dijkstrův algoritmus počítá nejkratší vzdálenosti ze zvoleného výchozího vrcholu do cílového vrcholu grafu (nebo do všech ostatních vrcholů grafu). Bellmanův-Fordův algoritmus je o něco pomalejší než algoritmus Dijkstrův, ale zato ho lze použít i na grafy se záporným ohodnocením hran. Od Dijkstrova algoritmu se liší způsobem procházení grafu.

Pro potřeby tohoto algoritmu si budeme orientované hrany zkoumaného grafu uchovávat ve třech polích, kde $a[i]$ je začátek, $b[i]$ je konec a $t[i]$ je délka i-té hrany. Na pořadí hran nezáleží, budeme tedy pracovat s takovým pořadím, v jakém jsou hrany zadány na vstupu.

Rovněž tento algoritmus je založen na principu dynamického programování. Dynamika je v této úloze vedena přes počet hran, jimiž je hledaný sled minimální délky tvořen. Nechť $D[l, i]$ je délka takového nejkratšího sledu z vrcholu 1 do vrcholu i, který používá právě l hran. Je zřejmé, že $D[0, i]$ je rovno nekonečnu pro všechna i kromě 1, zatímco $D[0, 1] = 0$.

Předpokládejme, že známe D$[l-1,i]$ pro všechna i a pro nějaké $l > 0$. Snadno potom spočítáme D$[l,i]$ pro libovolné i. V nejkratším sledu tvořeném l hranami je nějaká hrana poslední a zbytek je nejkratší sled používající $l-1$ hran, který končí v počátečním vrcholu l-té hrany. Stačí tedy vyzkoušet všechny možnosti pro tuto poslední hranu. Tím dostáváme vztah pro výpočet hodnot D$[l,i]$:

$$\mathrm{D}[l,i] = \min(1 \le k \le M)\{\mathrm{D}[l-1,\mathrm{a}[k]] + \mathrm{t}[k], \quad \text{kde } \mathrm{b}[k] = i\}$$

Při zvolené reprezentaci grafu se výpočet nejsnáze provádí tak, že projdeme postupně všechny hrany a počítáme jednotlivá minima pro všechny vrcholy současně. Víme, že pokud existuje nejkratší sled z 1 do N, bude mít nejvýše $N-1$ hran, neboť neobsahuje cyklus. Výsledkem je tedy minimum z hodnot D$[l,N]$ pro $l = 1,\ldots,N$–1. Je-li tato hodnota rovna nekonečnu, potom žádný sled neexistuje.

Ještě potřebujeme ověřit, zda se nemůžeme dostat do záporného cyklu. Takový cyklus může obsahovat nejvýše N hran, jak si můžeme ukázat třeba na příkladu grafu s orientovanými ohodnocenými hranami $(1,2,1)$, $(2,3,1),\ldots,(N–1,N,1),(N,1,–N)$. Jestliže tedy existuje sled obsahující záporný cyklus, pak existuje i sled délky nejvýše $2N$–1, který tento cyklus obsahuje. Popsanou úpravu vzdáleností D[l, i] proto spustíme ještě N krát. Když minimum z D$[l,N]$ pro $N \le l \le 2N$–1 je menší než výsledek, který jsme našli předtím, potom skutečně existuje sled z 1 do N, který obsahuje záporný cyklus.

Na závěr můžeme provést ještě jedno implementační zjednodušení. Uvědomte si, že nás nezajímají přesné délky sledů s právě l hranami. Proto nám stačí použít v programu pouze jednorozměrné pole D$[i]$ a výše uvedené úpravy provádět jen na něm. Tímto zjednodušením výsledek výpočtu nezměníme, i když hodnoty získané po jednotlivých iteracích mohou být odlišné od původního řešení.

Časová složitost tohoto algoritmu je $\mathrm{O}(N.M)$, paměťová $\mathrm{O}(N+M)$.

```
program Vesmirne_cestovani;
const MaxN = 1000;   {maximální počet vrcholů}
      MaxM = 50000;  {maximální počet hran}
      Nekonecno = 2000000000;
var N, M: integer;   {skutečný počet vrcholů a hran}
    f: text;
    a: array[1..MaxM] of integer;
```

```
    b: array[1..MaxM] of integer;
    t: array[1..MaxM] of integer;
    D: array[1..MaxN] of longint;
    i, l, k: integer;
    vysledek: longint;

begin
  {Načtení vstupních dat:}
  assign(f, 'teleport.in');
  reset(f);
  readln(f, N, M);
  for i:=1 to M do
    readln(f, a[i], b[i], t[i]);
  close(f);

  {Inicialiazce:}
  assign(f, 'teleport.out');
  rewrite(f);
  D[1]:=0;
  for i:=2 to N do
     D[i]:=Nekonecno;

  {Vlastní výpočet cest:}
  for l:=1 to N-1 do
     for k:=1 to M do
        if D[b[k]] > D[a[k]] + t[k] then
           D[b[k]]:=D[a[k]] + t[k];
  vysledek:=D[N];

  if vysledek = Nekonecno then
     writeln(f, 'Vedci umrou hlady')

  else
     begin  {ověření existence záporných cyklů:}
     for l:=1 to N do
        for k:=1 to M do
           if D[b[k]] > D[a[k]] + t[k] then
              D[b[k]]:=D[a[k]] + t[k];
```

```
      if D[N] < vysledek then
         writeln(f, 'Vedci poznaji vznik vesmiru')
      else
         writeln(f, vysledek);
      end;

  close(f);
end.
```

Wolfram|Alpha

LUKÁŠ HONZÍK

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Nejen vyučující matematiky na středních a vysokých školách mají s názvem společnosti Wolfram Research, Inc. spojený především její nejznámější produkt, kterým je výpočetní program Wolfram Mathematica využitelný v mnoha technických oblastech. Mathematica se v loňském roce dočkala své již osmé verze a po dlouhou dobu zůstává „vlajkovou lodí" společnosti.

Méně známou skutečností je pak fakt, že společnost již nějaký čas provozuje a dále vyvíjí online webovou službu Wolfram|Alpha (někdy též psáno jako Wolfram Alpha nebo WolframAlpha), kterou zřejmě nejlépe definuje její anglický podtitul „*Computational Knowledge Engine*". Toto slovní spojení lze do češtiny přeložit přibližně jako výpočetní vědomostní prostředek, či nástroj. Uživatelé jej najdou prostřednictvím webového prohlížeče na adrese www.wolframalpha.com a mohou pomocí něj provádět matematické výpočty, vyhledávat a zjišťovat informace.

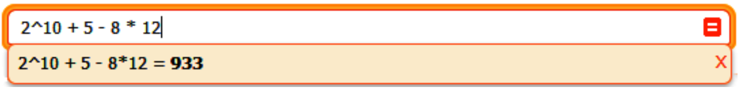
Vývoj a prostředí

Duchovním otcem systému je britský vědec Stephen Wolfram, hlavní vývojář již zmíněného softwaru Mathematica. První oznámení o rozběhnutí celého projektu učinil Wolfram v březnu 2009 (v návaznosti na svou knihu *A New Kind of Science*, na které pracoval v letech 1992 až 2002 pojednávající o nové filozofii přístupu k vědě) a dva měsíce nato došlo ke spuštění projektu. Oficiální spuštění proběhlo 18. května, ale webové rozhraní bylo pro veřejnost funkční již 15. května.

Samotné prostředí Wolfram|Alpha vypadá velmi jednoduše, nejdůležitější částí úvodní stránky www.wolframalpha.com je příkazový řádek (obr. 1), do nějž uživatel vepisuje své příkazy a dotazy.

Je-li do řádku vpisován matematický výraz, systém okamžitě provádí výpočet a průběžný výsledek zobrazuje v rozbalovacím okénku, které je podobné „našeptávači“ známému třeba z vyhledávače Google (obr. 2).

Obr. 1



Obr. 2

Pro získání kompletního výsledku je nutné po dopsání příkazu stisknout Enter, případně kliknout na potvrzovací tlačítko se symbolem „=“ v pravé části řádku. Systém následně vygeneruje odpověď, která může mít i několik oddělených částí. Například pro výše uvedené zadání `2^10 + 5 - 8*12` dostaneme odpověď sestávající ze čtyř částí – v první je uvedený vstupní příkaz neboli `2^10 + 5 - 8*12`, níže nalezneme výsledek 933 následovaný slovním vyjádřením (nine hundred thirty-three) grafickým znázorněním výsledku na číselné ose.

Obdobně vše funguje i při vyhledávání informací. Zadejme do příkazové řádky příkaz `December 28, 1982` (*28. prosince 1982*). Systém nyní vstup vyhodnotí nikoliv jako výpočetní operaci, nýbrž jako vyhledávání a zobrazí dostupná data k požadovanému dni. Na obrazovce se tak vypíšou informace o tom, jaké datum má dotyčný den v různých kalendářích (mimo jiné v židovské, islámském, čínském lunárním, či mayském), o kolikátý den roku 1982 šlo a do jakého týdne a čtvrtletí roku spadal, následují významná výročí vztahující se k zadanému dni a celý výčet uzavírá údaj o času východu a západu slunce a fázi Měsíce.

Některá z takto zobrazených dat jsou dále uvedena ve formě hypertextových odkazů, takže zaujme-li uživatele některý z vypsaných výsledků, je možné o něm zobrazit detailnější údaje pouhým kliknutím myši a není nutné jej vypisovat do příkazového řádku.

Vyhledávač informací

Jak již bylo řečeno dříve, Wolfram|Alpha může sloužit i jako vyhledávač informací. Nemusí však jít jen o strohé zadávání krátkých hesel, jak tomu obyčejně u podobných informačních systémů a encyklopedií bývá. Uživatel může svůj požadavek konstruovat jako normální otázku, ve které jsou následně vyhledána klíčová slova a podle nich generován výstup. To s sebou přirozeně nese riziko, že taková otázka bude špatně „pochopena“ nebo některé z použitých slov systém „nezná“, nicméně při hledání určité informace obsažené v rozsáhlém souboru dat je již na volbě uživatele, který z přístupů upřednostní.

Pokud bychom měli za úkol vyhledat informaci, který stát světa je na 78. příčce v počtu obyvatel, je možné nechat si vypsat příkazem **population** všechny příslušné údaje a předpokládaje, že někde mezi nimi je seznam zemí setříděný podle počtu obyvatel, se pustit do hledání, jednodušší však je zeptat se přímo dotazem ve tvaru **What is the 78th largest country by population?** (*Která země je na 78. místě podle počtu obyvatel?*) Výsledkem je odpověď, že se jedná o Českou republiku s 10,4 milióny obyvatel, doplněnou o spoustu dalších, v tomto případě podružných, informací (mezi jinými jsou zde uvedeny sousední země, hustota osídlení, předpokládaná délka života obyvatel, používané jazyky, největší česká města, atd.).

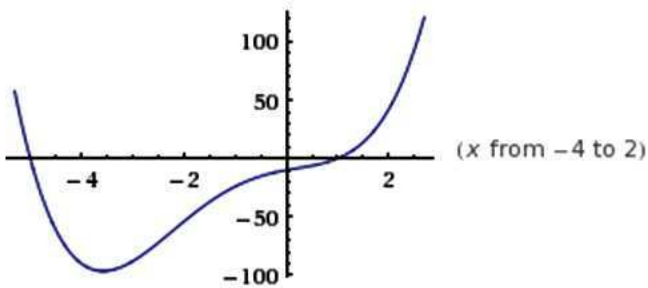
Obdobným způsobem může být sestaveno velké množství otázek a tak se dříve či později skutečně stane, že Wolfram|Alpha dotaz nebude schopen zodpovědět. Třeba při dotazu na největší kontinent **What is the largest continent?** (*Který kontinent je největší?*) nastanou problémy s interpretací otázky, systém se pokusí dát relevantní odpověď a zobrazí informace o významu slova **continent** (*kontinent*).

Zajímavým počinem je integrování nápovědy programu Mathematica do prostředí Wolfram|Alpha. Při zadání názvu konkrétního příkazu se zobrazí informace o tom, k čemu daný příkaz slouží, jaké povinné a nepovinné vstupní parametry má, a zároveň jsou tyto údaje doplněny výčtem příkazů podobných nebo s tématem úzce souvisejících. Otázkou ale v tomto případě zůstává, zda se nejedná o nadbytečnou funkci, když si uživatel může často detailnější informace včetně zásoby ilustračních příkladů vyhledat též přímo v on-line nápovědě Wolfram Mathematica Documentation Center.

Matematické výpočty

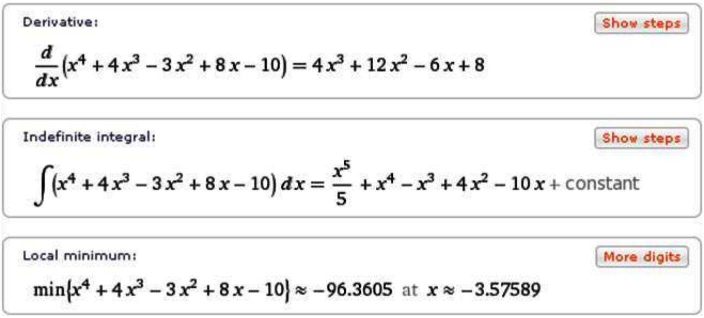
Matematické výpočty a řešení matematických úloh jsou silnou stránkou Wolfram|Alpha. Nejedná se sice o tak silný nástroj, jaký se uživatelům nabízí v podobě programů počítačové algebry Mathematica či například Maple, nicméně možností využití je více než dost. Systém umí integrovat, derivovat, řešit soustavy rovnic a nerovnic, zjistí kořeny algebraických rovnic vyšších řádů, zvládne vyšetření průběhu křivky včetně jejího grafického zobrazení.

Podívejme se nejprve, jak se Wolfram|Alpha vypořádá s vyšetřením průběhu funkce $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 10$. Zadáme do příkazového řádku příkaz ve tvaru `x^4 + 4*x^3- 3x^2 + 8*x - 10`. Systém vygeneruje odpověď skládající se z několika částí, z nichž jsou pro vyšetření průběhu dané funkce nejdůležitější ty, které obsahují alternativní způsob zápisu výrazu (zde nalezneme rozklad mnohočlenu) a reálné (případně komplexní) kořeny a dále pak definiční obor a hodnotu minima včetně udání hodnoty proměnné x, v níž minimum nastane. Vše je dále doplněné grafickým znázorněním křivky (obr. 3) a zápisem derivace $f'(x)$ a neurčitého integrálu $F(x)$ podle proměnné x (obr. 4).



Obr. 3 Vzhledem k tomu, že křivka funkce v intervalu $\langle 5; 1\rangle$ spolu s osou x omezuje část roviny, Wolfram|Alpha rovnou vypočítal i určitý integrál v mezích od -5 do 1.

Příjemným vylepšením je u vypsaných derivací a integrálů tlačítko „Show steps“, které dovolí nahlédnout do rozepsaného postupu derivování či integrování po jednotlivých krocích vedoucích k celkovému výsledku.

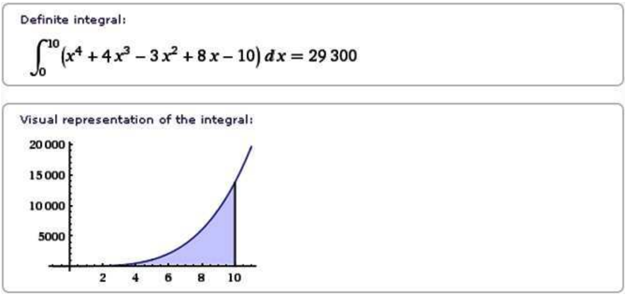


Obr. 4

Zajímá-li uživatele některý z konkrétních údajů, je možné pomocí příslušného příkazu vygenerovat pouze jej. Vykreslení křivky lze zobrazit příkazem **plot**, **graph** nebo **show** následovaným předpisem dané funkce, rozklad polynomu je proveden příkazem **factor** (v tomto případě systém vypíše jak faktorizaci v reálných číslech, tak v komplexních), příkaz **solve** či **roots** nalezne reálné kořeny a konečně **derive** a **integrate** vygenerují derivaci a neurčitý integrál funkce. Obě vypsané funkce, jak derivace, tak integrál, jsou navíc doplněny informacemi o jejich vlastním průběhu.

Nakonec se ještě zmiňme o určitém integrálu, nemusí nás totiž zajímat jen integrál v mezích určených kořeny funkce. Dejme tomu, že chceme znát hodnotu určitého integrálu výše užité funkce $f(x)$ pro hodnoty od $x = 0$ do $x = 10$. K tomu poslouží příkaz integrate `x^4 + 4x^3- 3x^2 + 8x - 10 from 0 to 10`. Výstupem je pak hodnota odpovídající určitému integrálu doplněná opět grafickým znázorněním v udaných mezích.

Mluvíme-li o vyšetřování průběhu funkce, zajímala by nás jistě i práce s limitami. I ty Wolfram|Alpha zvládá. Vezměme v úvahu třeba funkci $g(x) = \frac{\sin x}{x^2-2x-3}$. Zadání příkazu `sin(x)/(x^2 - 2x - 3)` sice spustí vyšetřování zadaného výrazu, nicméně vzhledem k náročnosti výpočtů dojde k překročení defaultně nastaveného časového limitu a systém zobrazí jen informace, které stihl zjistit. Na výpočet limit se tímto způsobem nedostalo. Dokážeme je však získat užitím upřesněného příkazu `lim sin(x)/(x^2 - 2x - 3)`, přičemž v odpovědi figurují jak limity v nevlastních bodech $\pm\infty$, tak zprava i zleva v bodech $x = -1$ a $x = 3$, v nichž není funkce definována. Navíc můžeme některou z limit, která nás zajímá víc než ostatní, upřednostnit. Kupříkladu pro limitu v bodě $x = -1$ použijeme příkaz `lim sin(x)/(x^2 - 2x - 3) for x = 1`.



Obr. 5

Prozatím jsme se při zkoušení, co Wolfram|Alpha z matematických výpočtů umí, pohybovali v oblasti matematické analýzy. Podívejme se nyní do algebry a vektorových prostorů, neboť systém zvládne i tyto věci.

Oblíbeným tématem týkajícím se vektorových prostorů je lineární závislost a nezávislost množiny zadaných vektorů. V případě závislosti pak řešitele obyčejně ještě zajímá jejich lineární kombinace rovná nulovému vektoru. Demonstrujme takovou úlohu na množině vektorů $(1, 2, -1, 1)$, $(2, -1, 4, 10)$, $(1, 0, 3, -5)$, $(4, 1, 6, 6)$. Můžeme buď zadat příkaz `vectors (1, 2, -1, 1), (2, -1, 4, 10), (1, 0, 3, -5), (4, 1, 6, 6)`, značící čtveřici vektorů a ve všemožných informacích odpovědi pak vyhledat potřebná data, nebo se dotázat přímo na lineární nezávislost příkazem ve tvaru `linear independence (1, 2, -1, 1), (2, -1, 4, 10), (1, 0, 3, -5), (4, 1, 6, 6)`, kdy Wolfram|Alpha rovnou odpoví, že zadané vektory jsou lineárně závislé a vypíše jejich lineární kombinaci rovnou nulovému vektoru.

Výše popsanou úlohu lze řešit i pomocí zjištění hodnosti matice, ve které zapíšeme jednotlivé vektory do řádků (nebo sloupců). Příkazem `row reduce (1, 2, -1, 1), (2, -1, 4, 10), (1, 0, 3, -5), (4, 1, 6, 6)` (případně můžeme použít klíčová slova Gaussean elimination následovaná danou maticí) nařídíme počítači převést matici do trojúhelníkového tvaru, z něhož již zjistíme hodnost a tedy i počet lineárně nezávislých vektorů. Pro názornost lze opět využít tlačítko „Show steps", jehož prostřednictvím můžeme nahlédnout do rozepsání jednotlivých kroků Gaussovy eliminace.

Zkusme ještě poslední úlohu, spadající pod soustavy rovnic s více neznámými. Mějme zadanou soustavu tří rovnice o třech neznámých $x + y - z = 7$, $x^2 + y^2 - z^2 = 37$, $x^3 + y^3 - z^3 = 1$. „Lidské" řešení může spočívat například v trochu nepohodlném rozepisování druhé a třetí rovnice podle vzorců a následném dosazování výrazů z rovnice první, což je ve výsledku poměrně zdlouhavé. Wolfram|Alpha nalezne řešení pomocí příkazu `solve x + y - z = 7, x^2 + y^2 - z^2 = 37, x^3 + y^3 - z^3 = 1` nepoměrně rychleji a zobrazí dva výsledky odpovídající uspořádaným trojicím [10, 9, 12] a [9, 10, 12].

Trocha konverzace

Samostatnou kapitolou práce (dá-li tomuto způsobu interakce tak říkat) je pseudokonverzace s Wolfram|Alpha, kdy si uživatel může se systémem zdánlivě smysluplně povídat. V zásadě jde pouze o to, že Wolfram|Alpha má naprogramované odpovědi na některé věty a otázky a podle nich pak generuje předem dané odpovědi.

Pokud například uživatel napíše do příkazového řádku větu **Hello**. (*Ahoj.*), systém mu odpoví předem připravenou odpovědí **Hello, human**. (*Ahoj, člověče.*)

Komunikace pak může vypadat třeba takto:
Uživatel: **Hello.** (*Ahoj.*)
Wolfram|Alpha: **Hello, human.** (*Ahoj, člověče.*)
Uživatel: **What's your name?** (*Jak se jmenuješ?*)
Wolfram|Alpha: **My name is Wolfram|Alpha.** (*Jmenuji se Wolfram|Alpha.*)
Uživatel: **How are you?** (*Jak se máš?*)
Wolfram|Alpha: **I am doing well, thank you.** (*Mám se dobře, děkuji.*)

Přestože odpovědi dávají smysl, nesmí se uživatel nechat zmást, jde skutečně jen o několik málo naprogramovaných vět. Pokud systém nemá pro danou otázku odpověď přímo dánu, snaží se z ní vybrat klíčová slova. Na ně pak reaguje příslušným výstupem, nejčastěji v podobě hesla odpovídajícího vybranému klíčovému slovu.

Kupříkladu na otázku **Which country do you live in?** (*Ve které zemi žiješ?*), která by se dala logicky interpretovat jako žádost o udání polohy serverů, na nichž Wolfram|Alpha funguje, systém zobrazí informace týkající se hesla **Country** (*země*) – amerického periodika vydávaného vydavatelstvím Reader's Digest.

Na druhou stranu lze nalézt i věty a otázky, jejichž zodpovězení systémem uživatele pobaví, užitečnost mají však nulovou. Mezi ně patří například **Are you Skynet?** (*Jsi Skynet?*; Skynet je fiktivní systém umělé inteligence ze série filmů *Terminator* snažící se vyhladit lidstvo), **I like you.**, **I don't like you.** nebo rozloučení větou **Good bye.** (odpověď potěší fanoušky skupiny Beatles).

Nakonec ještě zmiňme fakt, že kromě bezplatné verze Wolfram|Alpha je od února 2012 k dispozici též placená verze Wolfram|Alpha Pro přístupná při měsíčních platbách 4,99 dolaru (případně 2,99 dolaru pro studenty), která k prostředkům dostupným v bezplatné verzi navíc dovoluje uploadování mnoha typů souborů a dat (včetně obrázků, tabulek, zvukových stop, XML souborů a dalších), jenž pak mohou být automaticky analyzovány, dostupná je zde také rozšířená klávesnice a možnost ukládat zadaná a vypočtená data a upravit si celé prostředí podle svých představ.

Závěr

Záměrem tohoto článku bylo představit čtenářům nejen z řad učitelů matematiky výpočetní a databázovou online službu Wolfram|Alpha dostupnou na webové adrese www.wolframalpha.com, ukázat některé její zajímavé a užitečné funkce a nabídnout tak jednoduchou ale zároveň zajímavou alternativu drahých komerčních programů.

Je poměrně zřejmé, že Wolfram|Alpha zatím nemůže ohrozit pozici komerčních programů typu Mathematica, Maple a dalších, které jsou navrženy přímo pro řešení složitých matematických úloh a mají k tomuto účelu implementovány nejmodernější výpočetní algoritmy a postupy. Na druhou stranu je to výpočetní nástroj, který lze bezplatně užívat na jakémkoliv počítači s přístupem k internetu, a i přes některé jeho nedostatky (některé prvky nedostupné mimo verzi Pro, občas se objevující vyskakující okno s reklamou na placenou verzi) se bezesporu jedná o produkt, který své uplatnění dokáže nalézt na všech stupních škol nejen ve výuce matematiky.

Literatura

[1] http://www.wolframalpha.com/

ZPRÁVY

53. Mezinárodní matematická olympiáda

53. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se uskutečnil 4.–16. července 2011 v Mar del Plata, po 15 letech se tak soutěž vrátila na jižní polokouli, opět (a podruhé) do Argentiny. Soutěže se zúčastnilo 548 studentů ze 100 zemí pěti kontinentů. Nechyběli žádní tradiční účastníci, poprvé se IMO zúčastnila Uganda.

České družstvo sestavené na základě výsledků ústředního kola kategorie A 61. ročníku MO tvořili tito soutěžící: *Michal Buráň* z GJAK v Uherském Brodě, *Michal Kopf*, ze SG v Opavě, *Anh Dung Le* z G v Tachově, *Jan Stopka* z G v Brně, tř. kpt. Jaroše, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou, a *Josef Svoboda*, z G ve Frýdlantu nad Ostravicí. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.*, z Přírodovědecké fakulty MU v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci. Kromě Ministertva školství, mládeže a tělovýchovy se na úhradě cestovného českého družstva jednou pětinou podílel také Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu.

Jednotlivé země odeslaly v dubnu návrhy úloh, organizátoři z nich 30 vybrali a zařadili to tzv. *Shortlistu.* Vedoucí delegací a další členové jury přijeli do Argentiny již 4. července. Seznámili se s Shortlistem, během tří zasedání z něj vybrali šestici soutěžních úloh, přeložili ji do národních jazyků a připravili bodovací schéma. Autorem páté vybrané úlohy je *Josef Tkadlec*, který jako bývalý úspěšný účastník IMO (2008 bronzová medaile, 2009 stříbrná medile) je nyní studentem MFF UK v Praze. Soutěžící se spolu s pedagogickými vedoucími přiletěli do Mar del Plata 8. července a ubytovali se v Gran hotelu Provincial poblíž pláže v centru města.

Slavnostní zahájení 53. ročníku IMO proběhlo den po příjezdu všech soutěžících v místním divadle. Na programu byly uvítací projevy organizátorů a představitelů Argentiny a slavnostní nástup všech zúčastněných družstev. Novinkou byl slavnostní slib všech účastníků a pořadatelů, že se budou řídit pravidly a duchem IMO, aby tato byla čestnou a spravedlivou soutěží mezi mladými matematiky celého světa.

Vlastní soutěž se konala tradičně ve dvou soutěžních dnech (10. a 11. července) v reprezentačních sálech hotelu. Soutěžící zde každý den řešili trojici příkladů po dobu 4,5 hodiny. Následující tři dny mohli soutěžící absolvovat poznávací program Mar del Plata. Mnoho soutěžících ovšem dalo přednost hraní her, které organizátoři připravili ve třech sálech hotelu, vědomi si toho, že v období místní „zimy“ (průměrná teplota moře i vzduchu 8 °C) se z prestižního a bouřlivého přímořského letoviska stává ospalé provinční město. Žákovská řešení mezitím byla nezávisle opravena vedoucími jednotlivých týmů a koordinátory, kteří poté po dva dny diskutovali o výsledném bodovém hodnocení jednotlivých úloh. Jejich snažení bylo završeno závěrečným zasedáním, na kterém jury schválila bodové hodnocení, rozhodla o udělení medailí, čestných hodnocení a potvrdila organizátory Mezinárodní matematické olympiády v roce 2016 (Brazílie).

Závěrečný den IMO se již tradičně konalo slavnostní zakončení olympiády spojené s oficiálním předáním medailí nejlepším soutěžícím. Absolutním vítězem se s plným bodovým ziskem 42 bodů stal *Jeck Lim* ze Singapuru. Po roce opět došlo ke změně v historických tabulkách, kdy se do jejich čela dostal *Teodor von Burg* ze Srbska, který během 6 účastí na IMO v letech 2007–2012 vybojoval 4 zlaté, 1 stříbrnou a 1 bronzovou medaili. V roce 2012 bylo rozděleno 51 zlatých, 88 stříbrných, 138 bronzových medailí a 148 čestných uznání. Je potěšitelné, že všichni čeští účastníci získali některé ocenění. *Anh Dung Le* se ziskem 23 bodů obsadil 85. místo a obhájil stříbrnou medaili z 52. IMO, *Josef Svoboda* (17 bodů, 145. místo) získal medaili bronzovou a *Jan Stopka* (12 bodů, 303. místo), *Michal Buráň*, *Martin Töpfer* (oba 10 bodů, 351. místo), *Michal Kopf* (8 bodů, 399. místo) si odvezli čestná uznání za úplné řešení alespoň jedné úlohy. V pořadí jednotlivých zemí obsadil český tým (spolu s Arménií a Kostarikou) 47.–49. místo se ziskem 80 bodů.

Zájemci o podrobnější informace o průběhu 53. ročníku IMO mohou získat další informace na oficiálních stránkách 53. olympiády: http://oma.org.ar/.

Dále uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh 53. ročníku IMO. (V závorce za textem úlohy je uvedena země, která úlohu do soutěže navrhla.)

1. soutěžní den (10. 7. 2012)

1. Je dán trojúhelník ABC. Nechť J je střed kružnice připsané ke straně BC a nechť M je bod jejího dotyku s touto stranou. Dále nechť K a L značí po řadě body dotyku této kružnice s přímkami AB a AC. Průsečík přímek LM a BJ označme F a průsečík přímek KM a CJ pak G. Dále nechť S je průsečík přímek AF a BC a konečně nechť T je průsečík přímek AG a BC. Dokažte, že M je středem úsečky ST. (Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA.)

(*Řecko*)

2. Je dáno celé kladné $n \geq 3$ a kladná reálná $a_2, a_3, \ldots, a_n$ taková, že $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Dokažte, že pak platí nerovnost
$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n$.

(*Austrálie*)

3. „Hra na chytrou horákyni“ je hrou mezi dvěma hráči A a B. Pravidla hry závisejí na dvou kladných celých číslech k a n, která jsou známa oběma hráčům.

Na začátku hry zvolí hráč A celá čísla x a N, kde $1 \leq x \leq N$, a z nich prozradí (po pravdě) hráči B pouze číslo N, číslo x si nechá pro sebe. Hráč B se nyní snaží získat informace o čísle x kladením otázek hráči A. Může přitom klást pouze otázky následujícího typu: vybere libovolnou podmnožinu S kladných celých čísel (muže vybrat i množinu, kterou již zvolil v některé z předchozích otázek) a zeptá se hráče A na to, zda číslo x leží v S. Hráč B může položit libovolně mnoho takovýchto otázek. Na každou otázku musí hráč A okamžitě odpovědět, a to bud „ano“, nebo „ne“. Při odpovědích však muže hráč A lhát, dokonce libovolně mnohokrát; jediným omezením je pouze to, aby mezi každými jeho $k + 1$ za sebou následujícími odpověďmi byla alespoň jedna pravdivá. Poté, co hráč B skončí s kladením všech svých otázek, zadá nějakou, nejvýše n-prvkovou, podmnožinu X kladných celých čísel. Pokud číslo x náleží do množiny X, tak hráč B vyhrál, jinak prohrál. Dokažte:

a) Jestliže je $n \geq 2^k$, tak má hráč B vyhrávající strategii.

b) Pro každé dostatečně velké celé kladné k (tj. od jisté meze pro každé celé kladné číslo k) existuje číslo $n \geq 1{,}99^k$ takové, že neexistuje vyhrávající strategie za hráče B.

(*Kanada*)

České družstvo při zahájení 53. IMO

2. soutěžní den (11. 7. 2012)

4. Najdete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to Z$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 =$$
$$= 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$. ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.)

(*Jihoafrická republika*)

5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$.

(*Česká republika*)

6. Nalezněte všechna celá kladná čísla n, pro která existují nezáporná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že platí rovnosti

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} =$$
$$= \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(*Srbsko*)

Dále uveďme pořadí některých zemí na 53. IMO (v závorce je uveden celkový bodový zisk a dále počet zlatých, stříbrných a bronzových medailí):

1. Korea (209 b., 6-0-0), 2. Čína (195 b., 5-0-1), 3. USA (194 b., 5-1-0), 4. Rusko (177 b., 4-2-0), 5.–6. Kanada (159 b., 3-1-2), Thajsko (159 b., 3-3-0), 7. Singapur (154 b., 1-3-2), 8. Írán (151 b., 3-2-1), 9. Vietnam (148 b., 1-3-2), 10. Rumunsko (144 b., 2-3-1), 11. Indie (136 b., 2-3-0), 12.–13. KLDR (128 b., 2-1-3), Turecko (128 b., 1-3-2), 14. Tchaj-wan (127 b., 1-3-0), 15. Srbsko (126 b., 1-2-1), 16. Peru (125 b., 0-3-2), 17. Japonsko (121 b., 0-4-1), 18. Polsko (119 b., 0-2-4), 19.–21. Brazílie (116 b., 1-1-3), Bulharsko (116 b., 1-2-2) Ukrajina (116 b., 0-3-2), . . . 47.–49. *Česká republika* (80 b., 0-1-1), . . . , 100. Kuvajt (0 b. 0-0-0).

Následující, 54. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční 18.–28. července 2013 v kolumbijském karibském přístavním městě Santa Marta.

Pavel Calábek

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovovaná příprava budoucích učitelů matematiky, fyziky a informatiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové

V rámci projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost Evropského sociálního fondu „Inovace studijních oborů zajišťovaných katedrami PřF UHK", reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0118, jsou v současnosti na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové (PřF UHK) inovovány mimo jiné i učitelské studijní obory matematiky, fyziky a informatiky. Inovace výše zmíněných učitelských oborů jsou směřovány tak, aby výuka odpovídala současným vysokým nárokům na učitelskou profesi a potřebám trhu práce. Důraz je kladen především na didaktické předměty. Jedním z hlavních cílů projektu je modernizace prostředků a metod výuky. Jsou vytvářeny nové studijní opory, z velké části elektronické, včetně e-learningových. Fyzikální laboratoře budou dovybaveny moderními zařízeními mimo jiné i experimenty z jaderné fyziky. Studenti mají v rámci projektu možnosti absolvovat stáž v průmyslových subjektech nebo i vycestovat na stáž na akademickou instituci do zahraničí.

Negativním trendem současné doby je, že naše obory trpí nedostatkem kvalitních studentů v souladu s obecným poklesem zájmu o přírodovědné předměty. Současný systém vzdělávání budoucích pedagogů bohužel neodpovídá dnešním potřebám. Budoucí pedagogové nejsou cíleně připravováni na svoji praxi, a to zejména v oblasti nových metod výuky, moderních didaktických prostředků a pomůcek, především při využívání výpočetní techniky ve výuce. Náprava tohoto stavu se doposud, vzhledem k vybavení a zastaralým učebním plánům vycházejících z původní akreditace a studijním materiálům, nedařila, jak vyplývá mimo jiné i z dotazníkových průzkumů.

V projektu jsme nezapomněli ani na vyučující PřF UHK. I oni dostávají možnost dalšího odborného růstu ve svých oborech a to zejména formou kursů dalšího vzdělávání či možnosti vycestovat do zahraničí na odbornou stáž.

Projekt by měl studium na PřF UHK zatraktivnit a přilákat tak kvalitnější studenty. V důsledku toho věříme i v postupný růst kvality vyučování matematiky, fyziky a informatiky na základních a středních školách.

Jan Kříž
PřF UHK Hradec Králové

Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky

Tým pracovníků Katedry experimentální fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci v současné době druhým rokem řeší projekt Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky, který je podporován operačním programem Vzdělávání pro konkurenceschopnost Evropského sociálního fondu.

Záměr projektu

Studenti učitelství fyziky mají ve studijních plánech předměty studijního oboru Fyzika, které jsou společné i pro studenty odborného, neučitelského studia. K tomuto přístupu došlo v období rozdělení studia na studium bakalářské a navazující magisterské. Stávající předměty tedy nejsou koncipovány s ohledem na vzdělávací potřeby studenta učitelství fyziky na základních a středních školách. Studium učitelství je dvouoborové, tudíž studentům se podstatně zvětšil obsah studovaných předmětů jejich aprobace. Časová dotace je rovněž příliš vysoká. Tradiční předmětový přístup vzhledem ke kreditnímu systému není optimální. Proto považujeme za zásadní provést modularizaci současného studijního plánu. V současnosti je provedena modularizace profesní složky přípravy učitele, takže tato modularizace odborné složky bude logicky navazovat. V tomto projektu je vytvořen systém 10 povinných modulů, zahrnujících jak teorii, tak i semináře a praktická cvičení, v nichž dojde k obsahovým inovacím.

Nabídka nově vytvořených 10 modulů napomůže řešit vzdělávací potřeby studentů učitelství fyziky a požadavky trhu práce - zejména škol, které poukazují na stále nedostačující nabídku kombinované formy studia učitelství fyziky na přírodovědecké fakultě. S využitím modulů a jejich studijních opor budou mít možnost získat aprobaci k vyučování fyzice v kombinovaném studiu. Tento modulární přístup umožní i neaprobovaným učitelům fyziky doplnit si kvalifikaci. Stejně tak umožní učitelům s aprobací pro základní školy získat aprobaci pro střední školy.

Přínos projektu pro cílové skupiny

Primární přínos pro cílové skupiny lze spatřovat v tom, že studentům učitelství fyziky se modularizací studijního plánu zjednoduší orientace v tomto plánu a studenti výběr modulů budou provádět v souladu se svými možnostmi a schopnostmi. V modulu budou těsně navazovat teorie, semináře a laboratorní cvičení. Během semestru bude student koncentrovat pozornost na studium jednoho modulu a ne několika odlišných předmětů jako doposud. Sníží se časová náročnost pro studenty v důsledku optimalizace pomocí vytvořených modulů. Vytvořené popisy modulů dle jednotné struktury vymezily přesněji obsah modulů a požadavky na jeho ukončení, což usnadní studentům přípravu na výuku. Vysokoškolským studentům se zkvalitní výuka využíváním inovativních přístupů s využitím moderních výukových metod a alternativních způsobů hodnocení v modulech včetně ICT. Vytvořené studijní podpory k jednotlivým modulům představují velmi důležitou podporu studia. Studentům učitelství fyziky se zefektivní příprava na budoucí povolání zvýšením oborově didaktických a odborných kompetencí. Lze očekávat snížení neúspěšnosti studentů ve studiu učitelství fyziky. Studentská portfolia, vytvořená v průběhu studia jako jedna z možností alternativního způsobu hodnocení studenta v modulu, budou využitelná i ve výběrových řízeních při získávání pozic na trhu práce. Při výuce se budoucí učitelé seznámí zároveň s moderními didaktickými metodami a vzdělávacími technologiemi, stejně tak jako s moderními učebními pomůckami a přístroji pro výuku fyziky.

Inovativnost projektu

Inovativnost projektu má dosah v oblasti strukturální, obsahové, procesuální a materiální. Především jde o modularizaci odborné složky počáteční přípravy učitelů fyziky a její organické propojení s již provedenou modularizací profesní složky přípravy. Nově vytvořené moduly obsahově budou inovované vzhledem k stávajícím předmětům studijního plánu v souladu s poznatky fyziky jako vědy a v souladu se vzdělávacími potřebami budoucího učitele fyziky. V modulech je maximálně využito ICT a moderních výukových prostředků. Moduly zahrnují v maximální míře interaktivní výuku s podporou ICT. Přidanou hodnotou projektu je kvalitnější počáteční vzdělání učitelů fyziky, vytvoření nových podpůrných materiálů pro studenty a možnost otevření kombinované formy studia učitelství fyziky. Vytvářené odborné a odborně didaktické kompetence usnadní využitelnost absolventa na trhu práce. Za přídavnou hodnotu lze také považovat snížení počtu neúspěšných studentů učitelství fyziky a zvýšení zájmu o toto studium. Bližší informace o projektu lze nalézt na webových stránkách projektu: http://www.mofy.upol.cz.

Tento článek byl zpracován s podporou projektu Evropského sociálního fondu a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky. Registrační číslo: CZ. 1.07/2.2.00/18.0018.

Danuše Nezvalová
PřF UP Olomouc

Z HISTORIE

Sto let Bohrova modelu atomu

Roku 1897 oznámil *J. J. Thomson* na zasedání londýnské *Royal Society* objev pranepatrné částice – elektronu – a následujícího roku přišel s představou atomu jako homogenní koule kladně nabité látky, v níž jsou rovnoměrně rozloženy elektrony. *Ernest Rutherford* roku 1911 ovšem na základě pokusů prokázal, že atom obsahuje téměř všechnu hmotu soustředěnu v jádře, kolem něhož se pohybují elektrony. Podle klasické mechaniky se tu nabízela k dalším úvahám jakási paralela mezi sluneční soustavou a jejím miniaturním modelem – atomem. Rozdíl obou soustav je nejen kvantitativní, nýbrž i kvalitativní. Zatímco u planet jde výhradně o silové působení gravitační, u atomu s nabitými částicemi přistupuje ještě síla coulombovská.

Planetární model atomu ale přinášel své problémy. Podle klasické elektrodynamiky náboj, který se pohybuje se zrychlením, emituje záření. Takovým nábojem je elektron pohybující se s dostředivým zrychlením, a přesto nezáří. Alespoň ne pořád. Kdyby naopak záření z tohoto důvodu emitoval, bylo by jeho spektrum spojité, a elektron by v důsledku úbytku své energie spirálovitě klesal, až by dopadl na jádro. Atom je však stabilní, sice jako planetární soustava, ale z jiného důvodu.

Balmerovo matematické řešení poloh čar ve spektru

Záření vodíkových atomů ve slunečním světle si poprvé povšimli *Hagenbach* a *Ångström* kolem roku 1853. Ve spektru shlédli několik čar, jejichž vlnové délky Ångström změřil: 656,30 nm, 486,16 nm, 434,07 nm 410,12 nm. Hagenbach byl přesvědčen, že v těchto číslech skrytá nějaká vzájemná souvislost, nemohl na ni ale přijít, a proto svěřil problém *J. Balmerovi*, tehdy působícímu na střední škole v Basileji. Ten zjistil, že čísla v sobě obsahují jakousi pevnou část 364,56 nm a dále jsou velmi přibližně „odvoditelná“ podle následujících vztahů:

$$656{,}30 = 364{,}56 \cdot \frac{9}{5} = 364{,}56\left(\frac{3^2}{3^2-2^2}\right),$$

$$486{,}16 = 364{,}56 \cdot \frac{16}{12} = 364{,}56\left(\frac{4^2}{4^2-2^2}\right),$$

$$434{,}07 = 364{,}56 \cdot \frac{25}{21} = 364{,}56\left(\frac{5^2}{5^2-2^2}\right),$$

$$410{,}12 = 364{,}56 \cdot \frac{36}{32} = 364{,}56\left(\frac{6^2}{6^2-2^2}\right),$$

Obecný vzorec pro vlnovou délku čáry byl podle Balmera

$$\lambda = 364{,}56 \cdot \left(\frac{m^2}{m^2 - 2^2} \right),$$

kde $m = 3, 4, 5, 6$. Nějakých 30 let zůstala tato matematická zajímavost nepovšimnuta.

Bohrovo fyzikální řešení poloh čar ve spektru

Na cestě k hledání stavby atomu možná Bohrovi pomohla náhoda. Od roku 1911 byl na jakési stáži u J. J. Thomsona v Cambridge s cílem dokončit u něho disertaci. Thomson se Bohrovi nijak nevěnoval, což ho mrzelo, a proto odešel z Cambridge k E. Rutherfordovi do Manchesteru. Tam stanul tváří v tvář autorovi tehdy nového modelu atomu. Rutherford sám v tuto dobu považoval svůj planetární model atomu za hypotézu, jež je sice podpořena rozptylovým pokusem, avšak neumožňuje vysvětlit problémy stability atomu, což je zásadní věc. Z pohledu klasické mechaniky to nedokázal ani Bohr, ale přišel na to, že touto cestou to opravdu nepůjde. To znamenalo významně změnit pohled na věc. Inspirace přišla odjinud.

Od roku 1900 do roku 1905 se kupředu posunula teorie záření absolutně černého tělesa. 14. prosince 1900 pronesl *Max Planck* přednášku *O teorii hustoty energie v normálním spektru* (tiskem [1]). V ní zavádí do vztahu pro rozdělovací funkci záření konstantu h po něm později pojmenovanou. Datum přednášky označujeme jako počátek formulování začátků kvantové mechaniky. Druhým faktem, který v tu dobu byl k dispozici, bylo vysvětlení fotoelektrického jevu *A. Einsteinem* v roce 1905. I zde již je součástí matematického popisu jevu Planckova konstanta.

Bohrovi se Planckovy a Einsteinovy výsledky hodily. Intuitivně vycítil, že čárové spektrum může být důsledkem skokového vyzařování energie. Na samém začátku své práce o chování elektronů v atomovém obalu [2] píše: „*Ať už nakonec změna pohybových zákonů elektronu dopadne jakkoli, zdá se být nevyhnutelným zavést do těchto zákonů veličinu, která je cizí klasické elektrodynamice, totiž Planckovu konstantu.*“ Jinak řečeno: Má-li být vyzařování ve spektru skokové, musí být skokový i přechod mezi trajektoriemi elektronu, a to ne libovolnými, nýbrž nějak pevně určenými. Při přechodu elektronu z dráhy vzdálenější na dráhu bližší jádru se emituje balíček (kvantum) energie v násobcích $h\nu$, pro přechod elektronu ve směru opačném je potřeba toto kvantum energie dodat. „*Zavedením Planckovy konstanty se problém stability elektronového obalu podstatně mění, neboť tato konstanta má takový rozměr a velikost, že spolu s hmotností a nábojem částic může vést k délce požadovaného řádu velikosti* [atomu – 10^{-10} m].“ Kupodivu hodila se i balmerovská matematická formule. „*V okamžiku, kdy jsem viděl Balmerův vztah, bylo mi vše jasné*“, píše Bohr.

Výsledky Bohrovy práce vstoupily do fyziky v té nejstručnější podobě jako tři postuláty:

I. V atomu existují jen určité stacionární orbity elektronů, na nichž elektron neemituje záření. Tyto dráhy jsou charakterizovány hlavním kvantovým číslem n.

II. Poloměry drah (orbitů) jsou násobkem $h/2\pi$.

III. K emisi záření dochází pouze při přechodu ze stabilní dráhy s vyšší energií na stabilní dráhu s nižší energií.

Pro vlnočty ($1/\lambda$) Balmerovy série nalezl vztah

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

kde R je Rydbergova konstanta a $n = 3, 4, 5, \ldots$ A co víc, zobecnění vztahu na tvar

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

z něhož pro $m = 1, 3, 4$ a 5 plynou vlnočty pro další série spektrálních čar (Lymanovu – objevena 1914), Paschenovu (1908), Brackettovu (1922) a Pfundovu

(1924)), ležící v infra-, resp. ultrafialové části vodíkového spektra. Série Brackettova a Pfundova byly skutečně později objeveny a dobře zapadaly do Bohrova schématu. Právě uvedený vztah umožňoval také výpočet Rydbergovy konstanty ze změřených vlnových délek. Toto udělalo na Einsteina velký dojem, neboť ať se s Bohrovou teorií nemohl ztotožnit, výpočet přesné hodnoty konstanty nemohla být náhoda.

Problémy nekončí

Bohrem postulované diskrétní stavy elektronů v obalu byla v souladu s experimentálními zjištěními (atom byl stabilní, vyzařoval jen za určitých podmínek, jeho spektrum bylo čárové). Přesto z jeho konstrukce chování elektronu ve vodíkovém atomu čišela jakási směs klasické mechaniky (určení charakteristik oběžných drah) a kvant (jen určitá frekvence záření a jen určité dráhy). Na to E. Rutherfod hned Bohra upozornil v dopise z 20. března 1913: „...směs Planckových idejí a staré mechaniky velmi komplikuje pochopení toho, co je vlastně skutečným základem tohoto pojetí.“ Dále namítal zhruba toto: Jak může elektron vědět, jakou frekvencí má kmitat a kde se má při sestupu zastavit?

Vážným nedostatkem Bohrovy teorie bylo také to, že nebyla úspěšná při popisu atomů s více elektrony, počínaje heliem[1].

Bohr kritiku vnímal jako oprávněnou. Nedokázal sice jít dále, ale tušil, že cesta je správná. „Začínám věřit, že v tomto problému stojíme před mimořádně velkými obtížemi, které můžeme zvládnout jen tak, že ustoupíme od našich běžných představ ještě dále, než jsme to museli učinit doposud...“ V tomto duchu Bohrův model inspiroval. Především vedl k pozdějšímu nezbytnému chápání elektronu jak částice i jako vlny. *De Broglie* nalezl jeho vlnovou délku na orbitě, *J. Franck* a *G. Hertz* známým pokusem z roku 1914 dokázali energetické skoky elektronu mezi určitými hladinami.

Co na to Einstein a jiní

Niels Bohr tvrdě zasáhl zákony klasické fyziky, avšak nijak je nenahradil zákony novými, obecnějšími, nýbrž postuloval. To samozřejmě A. Einstein cítil: „*jakoby nám zmizela půda pod nohama a nikde nebylo vidět pevnou půdu, na níž by bylo možné stavět. Vždy se mi zdálo zázrakem, že tento rozhoupaný a rozporuplný základ postačil k tomu, aby dovolil Bohrovi, člověku s geniální intuicí a přesným citem, najít hlavní zákony spektrálních čar a elektronových slupek atomů.*“ Z osobního setkání s Einsteinem v roce 1920 v Berlíně Bohr nabyl dojmu, že Einstein stav nových fyzikálních pohledů chápal jako nedefinitivní a předvídal, že sporné otázky budou předmětem možná dlouhodobého fyzikálního výzkumu.

Bohr nebyl žádný dogmatik. „*Myšlenky, které vyslovuji, nesmějí být chápány jako tvrzení, nýbrž jako otázky*“, reagoval.

Ještě v roce 1913 Bohrovi blahopřál *A. Sommerfield*. Odhadoval, že Bohrova práce časem dozraje a stane se velkým mezníkem v teoretické fyzice. Byl to on, kdo na Bohra bezprostředně navazoval.

Do skupiny tvrdých odpůrců patřili především *M. von Laue*, *lord Rayleigh*, *W. H. Bragg*, zpočátku také *J. J. Thomson* a *M. Born*. *Otto Stern* dokonce vyhrožoval, že zanechá fyziky, je-li na Bohrově teorii něco pravdivého.

L i t e r a t u r a

[1] *Planck, M.*: HUber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. Ann. Physik 4(1901), 553.

[1] Tento problém částečně odstranil později A. Sommerfield zavedením množiny eliptických drah a dalšího kvantového čísla.

[2] *Bohr, N.*: On the Constitution of Atoms and Molecules I–III. Philosophical Magazine 26(1913), 1–25, 476–502, 857–875.

[3] *Beiser, A.*: Úvod do moderní fyziky. Praha, Academia 1978.

[4] *Lacina, A.*: Bohrův model atomu. Pokroky MFA 53(2008), 125–151.

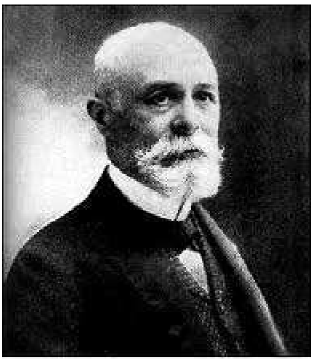
[5] *Kuzněcov, B. G.*: Einstein – život, smrt, nesmrtelnost. Praha, SPN 1984.

[6] *Bronowski, J.*: Vzestup člověka. Praha, Odeon 1985.

[7] *Westaway, F. V.*: Objevy bez konce, I. díl. Praha, F. Borový 1937.

František Jáchim

Eugen Goldstein – objevitel kanálových paprsků



Eugen Goldstein (1850–1930)

V dějinách fyziky se stává, že intenzivní snaha objasnit nějakou zdánlivě nepatrnou nesrovnalost ve stavu poznání nebo výsledcích naměřených údajů může přispět k zásadně novému či hlubšímu pohledu na přírodní jevy. K takové situaci došlo ke konci devatenáctého století, kdy příroda vyslala hned několik signálů z nitra hmoty v podobě tajuplných paprsků. S jejich objevem a studiem vlastností je spjato také jméno pozapomenutého německého experimentálního fyzika židovského původu *Eugena Goldsteina.*

Vše začalo objevem tzv. katodových paprsků, což je termín, se kterým se dnes již téměř nesetkáváme. Tyto paprsky se objevují v silně vyčerpaných skleněných trubicích se zředěným plynem, do nichž jsou zataveny dvě elektrody pod vysokým napětím. Paprsky vycházejí z katody a projevují se mihotavým světélkováním plynu. Dnes se uplatňují v nejrůznějších výbojkách, rentgenových lampách i televizních obrazovkách. Za jejich objevitele v letech 1858/1859 je považován německý matematik a fyzik *Julius Plücker*, působící na univerzitě v Bonnu. Ten zároveň zjistil, že tyto „světelné sloupce“ lze vychylovat magnetem. Po něm celá řada badatelů méně či více známých jmen (*J. W. Hittorf*, *G. H. Wiedemann*, *W. Crookes*, *J. H. Geissler*, *C. F. Varley*, *H. Hertz*, *P. Lenard*, *W. C. Röntgen*) s katodovými paprsky experimentovala a postupně odhalovala jejich další a další vlastnosti.

Do této řady patří také protagonista našeho vyprávění Eugen Goldstein. Narodil se 5. září 1850 v hornoslezském Gleiwitzu (dnes Gliwice, Polsko) v nezámožné židovské rodině. Přesto krátce studoval na univerzitě ve Wroslavi a pak v Berlíně u jednoho z nejvýznamnějších světových fyziků a mezinárodně proslulého koryfeje německé vědy *Hermanna von Helmholtze* (mezi jeho studijní kolegy patřili mj. *M. Planck*, *W. Wien* či *M. I. Pupin*). V roce 1881 zde obhájil doktorskou práci a od roku 1888 po celý život působil jako asistent a později (1927) vedoucí sekce astrofyziky na berlínské a postupimské observatoři. Při studiu vedení elektrického proudu v plynech a fluorescence látek využíval od roku 1898 svoji soukromou laboratoř, což byla tehdy rarita.

Zemřel již v dusné politické atmosféře antisemitismu a útoků na „židovskou fyziku“ v Berlíně 25. prosince 1930 a byl pohřben na hřbitově Weissensee (pro zajímavost – druhém největším židovském hřbitově v Evropě, s rozlohou 42 ha, který zázrakem téměř nezničen přežil éru nacismu i spojenecké bombardování koncem druhé světové války).

Při svých pokusech Goldstein zjistil, že katodové paprsky (*kathodestrahlen*) vystupují kolmo z povrchu katody a nezávisejí na materiálu, z něhož je zhotovena. To by znamenalo, že jde o proud nějakých univerzálních částic vycházejících z nitra atomu. Protože však částice menší než atomy nebyly tenkrát známy – a také o samotné existenci atomů stále panovaly pochybnosti – považoval Goldstein katodové paprsky za elektromagnetické vlny; obdobný názor zastávali i další významní němečtí fyzikové *H. Hertz* a *G. H. Wiedemann*. Byl také vlastně první, kdo v roce 1876 použil název „katodové paprsky“ namísto tehdy užívaného termínu „doutnavé světlo“.

V roce 1886 Goldstein poněkud upravil výbojovou trubici a zjistil, že směrem od anody ke katodě vyletují další paprsky, procházející otvorem („kanálem“) v perforované katodě a pohybující se dál až ke stínítku, kde vyvolávají světélkování. Tyto nové paprsky (*kanalstrahlen*) nazval kanálové neboli anodové. Jejich rychlost závisí na vloženém napětí; jde o proud částic (kladných iontů) získaných z plynů. Zapsal se tak do historie atomové teorie a objevu subatomární částice protonu, byť byly (a jsou) jeho vcelku moderní názory široce ignorovány.

V rámci svých prací v oblasti astrofyziky Goldstein využíval také výbojky s katodovým zářením k výzkumu komet a modelování jejich ohonů. Se svým nadřízeným, ředitelem berlínské hvězdárny *W. Foerstrem*, o tom otiskli v roce 1897 v Zeitungen zprávu pod titulem: „Německá věda triumfuje“. Odráží to tehdejší situaci, kdy na jedno z předních míst ve fyzikálním výzkumu se dostalo Německo, které rychle dohánělo zpoždění za Anglií a Francií. Jinak Goldstein publikoval málo, protože jako později Röntgen patřil k těm fyzikům, kteří prezentaci nebo dokonce popularizaci vědeckých výsledků odmítají kvůli riziku nesprávného zjednodušení nebo špatného porozumění.

Literatura

[1] *Štoll, I.*: Dějiny fyziky. Prometheus, Praha 2009.

[2] *Gascha, H. – Pflanz, S.*: Kompendium fyziky. Universum, Praha 2008.

[3] Ottův slovník naučný nové doby (fotoprint). Paseka/Argo, Litomyšl/ Praha 1999.

[4] *Paturi, F. R.*: Kronika techniky. Fortuna Print, Praha 1993.

[5] *Kraus, I.*: Dějiny evropských objevů a vynálezů. Academia, Praha 2001.

Bohumil Tesařík