

MATEMATIKA

Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

1. Úvod

Bezprostředním podnětem k napsání tohoto článku bylo studium monografie *Ladislava Kvasze* (*1962) *Patterns of Change* [14]. Ačkoliv tato kniha se nezabývá didaktikou, ale filozofií a historií matematiky, lze v ní najít řadu podnětů pro školskou praxi. O některých z nich se zde chci zmínit. Na okraj poznamenávám, že citovaná kniha nejen že byla vydána ve známém švýcarském nakladatelství *Birkhäuser* v řadě *Historické studie*, ale byla v roce 2010 v Portugalsku odměněna prestižní *Mezinárodní cenou Fernanda Gila za filozofii a vědu*. Gratuluji profesoru Kvaszovi z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze k tak významnému ocenění jeho díla.

Kvaszovy výsledky mi připomněly dva starší autory, jejichž práce souvisejí s problematikou, kterou Kvasz řeší: *Karla Raimunda Poppera* (1902–1994), významného rakouského filosofa a matematika a *Jerome Seymoura Brunera* (*1915), známého amerického psychologa. Z podnětů některých prací těchto tří autorů vyrůstá můj příspěvek.

2. Vyučování a komunikace

„Každý učitel ... musí být schopen komunikovat tak, aby se komunikace stala účinným prostředkem navození a podpory učební činnosti žáků“ (L. Prokešová, [12], s. 252). „Ať se jakkoliv proklamuje, že učitel nemá být hlavně dodavatelem poznatků, že má především řídit učení žáků apod., je

to mylná představa: Učitel je takový subjekt edukačního procesu, jehož činnost je prioritně zacílena na transmissi poznatků k příjemcům – žákům, a z toho nutně vyplývá jeho vysoká aktivita v komunikaci při vyučování“ ([16], s. 316). Ponechme zde zcela stranou otázku poměru transmisivních a konstruktivních stylů ve vyučování, která je z hlediska našeho tématu podružná. Z citovaných ukázek je nicméně zřejmé, že otázky jazyka hrály a budou hrát i v budoucnosti ve škole významnou roli. Vyučování matematice se odehrává v jazyce mateřském, který je doplněn některými specifickými prvky, např. jazykem logiky a jazykem „vzorců“. Jádrem Kvaszovy monografie je tvrzení, že poznání jazyků matematiky je podstatné pro pochopení jejího vývoje. Hraje-li jazyk tak významnou roli ve vývoji matematiky – vědy, bude patrně hrát ještě významnější roli ve vyučování, při němž se nové matematické poznatky nevytvářejí, ale předávají mladé generaci. To je hlavní podnět pro didaktiku matematiky, který jsem našel v Kvaszově knize. Jazykům bychom měli věnovat ve vyučování větší pozornost, než býval zvykem.

3. Popperovy tři světy, Kvaszovy tři principy a Brunerovy tři reprezentace

Vzhledem k tomu, že Popperova idea tří světů se mi jeví jako velmi důležitá z hlediska didaktického, připomenu ji citací několika autorových myšlenek.

„Bolzano ve své *Wissenschaftslehre* zmiňoval „pravdy o sobě“, a obecněji „tvrzení o sobě“, a odlišoval je od (subjektivních) procesů myšlení, jimiž může člověk myslet nebo chápat pravdu, nebo obecněji, přijímat tvrzení buď jako pravdivá, nebo nepravdivá. Bolzanovo rozlišení samotných tvrzení a subjektivních procesů myšlení mi vždy připadalo jako svrchované důležité...“

Nazveme-li svět „věcí“ – fyzikálních objektů – prvním světem (svět 1) a svět subjektivních zkušeností (jako třeba procesy myšlení) druhým světem (svět 2), můžeme nazvat svět samotných tvrzení třetím světem“ (svět 3) ([15], s. 173).

„Připadá mi rozhodující, že objektivním myšlenkám – tj. teoriím – můžeme dát takovou podobu, že je můžeme hodnotit a můžeme se o nich dohadovat. Aby tomu tak mohlo být, musíme je formulovat v nějaké více-méně ustálené (zejména lingvistické) formě. Významné je i to, že můžeme rozlišovat kritiku pouhé formulace myšlenky – myšlenky lze formulovat poměrně dobře anebo ne tak dobře – a logické aspekty myšlenky samotné:

její pravdivost nebo její podobnost pravdě ve srovnání s nějakými jejími konkurentkami nebo její kompatibilitu s určitými jinými teoriemi. V tomto stadiu jsem zjistil, že musím osídlit svůj svět 3 jinými usedlíky, než jsou tvrzení; připojil jsem ještě k tvrzením nebo teoriím také problémy a argumenty, obzvláště kritické argumenty. Teorie by se měly totiž hodnotit vždy s ohledem na problémy, které by mohly řešit ... Je jasné, že koho zajímá věda, musí ho zajímat objekty světa 3. Vědce – fyzika mohou nejprve zajímat objekty světa 1 – řekněme krystaly a paprsky X. Avšak velice brzy si musí uvědomit, jak velmi záleží na interpretaci faktů, tj. našich teoriích, a tedy na objektech světa 3. Podobně historik vědy nebo filozof zabývající se o vědu musí především zkoumat objekty světa 3. Může ho samozřejmě zajímat ještě vztah mezi teoriemi světa 3 a procesy myšlenek ze světa 2; ale procesy myšlení ho budou zajímat především ve vztahu k teoriím, tj. k objektům, které patří do světa 3“ ([15], s. 175).

Dále dochází Popper k závěru: „Pokládám svět 3 – svět problémů, teorií a kritické argumentace – za jeden z výsledků vývoje lidského jazyka, který zpětně na tento vývoj působí“ ([15], s. 178).

Kvasz postupuje ve svém rozboru historie matematiky podle následujících tří principů:

1. Místo kontextu psychologie objevu nebo kontextu změny metodologie analyzuje změny v matematice v kontextu změn jejího jazyka.
2. Jazyku matematiky rozumí historicky.
3. Chápe jazyk matematiky v nejtěsnější spjatosti s její praxí.

Přitom dochází k závěru: „We will interpret changes in mathematics as changes of the language of mathematics“ (Změny v matematice budeme interpretovat jako změny v jejím jazyku [14], s. 7). Tato téze je téměř identická s citovaným závěrem Popperovým.

Vzhledem k tomu, že podle mého názoru pojem jazyka zahrnuje minimálně pravidla jeho konstrukce, ne-li přímo jeho gramatiku, což patrně nelze ve škole realizovat, budu často místo slova jazyk užívat Brunerův termín reprezentace [1].

Reprezentací pojmu budu rozumět *zastoupení* (*kód*) pojmu určitými výrazovými prostředky. Bruner rozlišuje reprezentace

enaktivní (činnostní),

ikonické (obrazové) a

symbolické (založené na konvenčním vyjádření).

Podrobnější charakteristika těchto typů reprezentace bude zřejmá z příkladů, které dále uvedu.

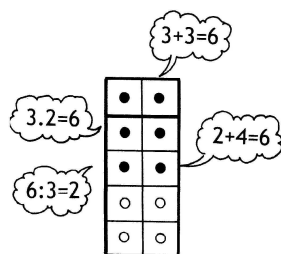
Někteří autoři chápou ovšem zde uvedené Brunerovy termíny volněji. Tak např. *Umberto Eco* (*1932) píše: „Ikona není nutně obrazem ve vizuálním smyslu, protože i melodie, kterou si pohvizduji, třebaš i falešně, může být ikonou Beethovenovy Osudové, ... i graf má podobu ikony – přestože nevykazuje žádnou formální podobnost s tím, co zobrazuje“ ([4], s. 66).

Vzhledem k tomu, že jádrem Kvaszova bádání je vývoj vědy, začíná své úvahy aritmetikou. Didaktika matematiky ovšem nutně musí do svých úvah zahrnout i procesy, které k matematice vedou. Z tohoto důvodu nepřekvapí, že Kvasz, na rozdíl od Brunera, neuvádí enaktivní reprezentace, které hrají ve vzdělávacím procesu důležitou roli. Vizualizace počtu je podstatnou složkou utváření prvních představ o přirozených číslech a v tomto procesu jsou činnosti žáků nezastupitelné. K této problematice, o níž dosti podrobně píšeme v knize [7], se ještě vrátím. Za enaktivní reprezentace považují ovšem i činnosti zprostředkované moderní technikou, zejména pak „živé“ obrazy fraktální geometrie, kterou Kvasz charakterizuje termínem *iterative geometry* ([14], s. 56).

4. Příklady reprezentací

4.1. Reprezentace enaktivní

Při práci s enaktivními neboli činnostními reprezentanty získáváme výsledky manipulací s hmotnými objekty.



Obr. 1

Snad nejpřirozenější enaktivní reprezentací čísel jsou prsty na ruce. Termín počítání na prstech a užívání desítkové početní soustavy dokládají, že tento přístup byl živý v minulosti a ani naše škola se mu nemůže vyhnout. Jistým „odosobněním“ počítání na prstech je počítání na klasickém počítadle, na němž lze posouváním kuliček na drátu modelovat malá přirozená čísla a jejich součet či rozdíl. Pro větší čísla byla vyvinuta řádová počítadla. Z historie je známo např. *počítání na línách* a do současnosti pře-

žívají ruské sčoty a různé formy abaků (např. čínský nebo japonský). Specifickým počítadlem je např. z Německa pocházející *Glazerovo okno* (obr. 1). Umístěním kuliček do důlků na prkénku modelujeme malá přirozená čísla a vidíme řadu aritmetických souvislostí (z obr. 1 lze např. vyčíst: $3 + 3 = 6$, $2 + 2 + 2 = 6$, $3 \cdot 2 = 6$, $2 \cdot 3 = 6$, $6 : 3 = 2$, $6 : 2 = 3$, atd.).

Enaktivní reprezentací přirozených čísel je např. krokování, při němž je číslo modelováno počtem kroků žáka nebo figurky na určené dráze. Didaktické zpracování této reprezentace realizoval *Milan Hejný* [8]. Přirozenými enaktivními reprezentacemi čísel jsou ovšem i „neuspořádané“ soubory nejprůzračnějších předmětů, např. podle *Pestalozziho*:

„Učí-li matka dítě znáti a jmenovati rozličné předměty, např. hrášky, kaménky atd., jako jeden, dva, tři, atd., jak je dítěti předříkává, zůstávají slova jeden, dva, tři stále nezměněna; zato slova hrášky, kaménky, dřívka atd. mění se vždy se změnou předmětu, jež dítěti ukazuje. Nezměněným jmenováním . . . a neustálou změnou druhého odliší se v duchu dítěte abstraktní pojem počtu . . .“ ([5], s. 65).

Petr Vopěnka hodnotí počítadla jako enaktivní reprezentaci přirozených čísel takto: „Na malých seskupeních osamocených jednoduchých objektů, to je dosud nezapojených do vztahů s jinými objekty, se projevuje už jen kvantitativní stránka malých přirozených čísel, zato však ve své nejprůzračnější čistotě. Číslo udávající počet objektů z takového seskupení je v podstatě jediným jevem, jenž se na něm ukazuje. Čím stejnější jsou objekty z nějakého seskupení, což je právě v případě osamocených abstraktních objektů dovedeno do krajnosti, tím výrazněji vystupuje do popředí čistá kvantitativní stránka čísla na něm se ukazujícího. Stará školní počítadla, na jejichž stejných kuličkách se děti procvičují v nauce o kvantitativní stránce malých přirozených čísel zvané počítání, jsou z tohoto hlediska zařízeními důmyslnými a rozhodně by neměla patřit minulosti“ ([17], s. 106).

Geometrickými enaktivními reprezentacemi jsou např. *skládanky* z historie známé jako různé typy *tangramů*. Mohou sloužit např. k rozvíjení představ o geometrických tvarech (úlohy typu *Složte ze čtyř shodných trojúhelníků trojúhelník*), o velikostech mnohoúhelníků (*Složte ze dvou shodných pravouhlých trojúhelníků obdélník a porovnejte jejich obsahy*), ale i k řešení úloh o zlomcích (poměr velikostí částí a celku). Enaktivní geometrickou reprezentací je ovšem i měření a provádění geometrických konstrukcí např. pravítkem a kružítkem.

Práce s enaktivními reprezentacemi má charakter vytváření modelů, tedy takových reprezentací, které umožňují předpovídání. Na nejnižší úrovni může jít pouze o určení výsledků početních operací, ale i o zdůvodňování tvrzení. Tyto činnosti jsou významné především proto, že žáci mohou do značné míry samostatně získávat výsledky a docházet tak k ikonickým nebo symbolickým reprezentacím. Takovéto činnosti jsou ovšem

pro matematiku charakteristické a dávno známé: odpočítáváním kuliček dospíváme k číslu, tedy k symbolické reprezentaci počtu.

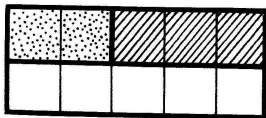
4.2 Reprezentace ikonické

Pro ilustraci uvedu nejdříve názory tří našich autorů. Jan Vyšín (1908–1983) napsal v předmluvě knihy *Elementární geometrie*: „*Obrazec je při provádění důkazu jen jakýmsi přehledným seznamem označení a zápisem situace, nikoliv podstatnou složkou při odůvodňování*“ ([19], s. 4).

Eduard Čech (1893–1960) hodnotí roli obrazů slovy: „*Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazů a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení*“ (citováno podle [9]).

Petr Vopěnka (*1935) píše: „*Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání*“ ([18], s. 569).

Považuji za velkou zásluhu Ladislava Kvasze, že zprostředkoval naší didaktice (i když zatím jen v anglickém jazyku) názor, že geometrické obrázky nejsou jen psychologickou pomůckou, ale „důležitým nástrojem konstruování logické struktury matematických teorií“ ([14], s. 5).



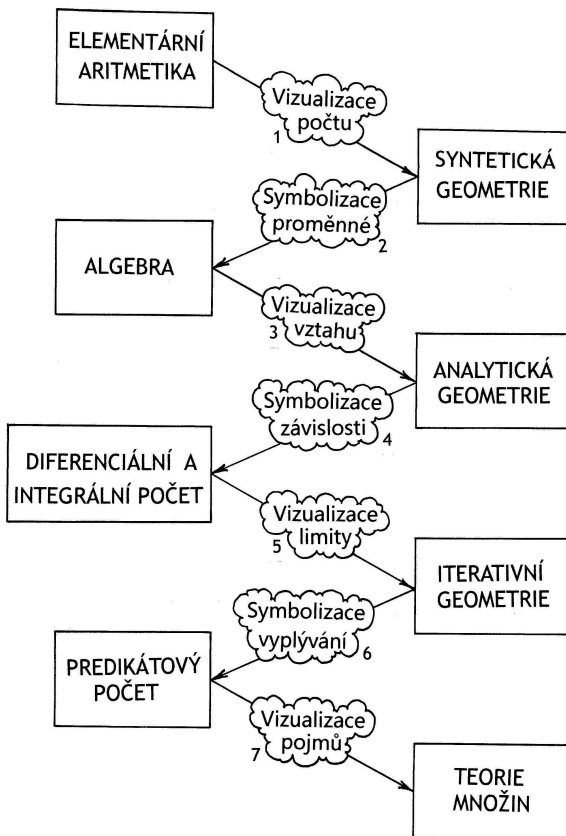
Obr. 2

Za nejzávažnější ikonické modely přirozených čísel můžeme považovat *číselné obrazce* a *Cuisenaireovy proužky*. Číselné obrazce byly hojně využívány ve školách v 19. století. Jejich autoři se snažili vytvářet u dětí „zřetelné a živé číselné představy bez počítání a bez číslovek“ ([5], s. 80). U nás propagoval číselné obrazce pedagog *Gustav Adolf*

Lindner (1828–1887). Dnes se s nimi setkávám např. na hracích kostkách a kamenech *domina*. Cuisenaireovy proužky pocházejí z Belgie a spojují kardinální pohled na přirozené číslo (z kolika čtverců se skládá proužek) s pohledem ordinálním a geometrickým (propedeutika měření délek). Kromě toho je každé číslo – proužek charakterizováno určitou barvou. Sčítání $3 + 2 = 5$ je modelování dvojicí proužků podle obr. 2. Glaserovo okno a Cuisenaireovy proužky jsou aplikovány např. v učebnici [3].

Ikonickými reprezentanty geometrického typu jsou rýsované nebo kreslené obrázky geometrických situací a to přesto, že žádný obrázek nemůže

mít všechny rysy abstraktních geometrických útvarů (narýsovaná úsečka není nikdy zcela přímá a bez tloušťky).



Obr. 3

4.3 Reprezentace symbolické

Pro tento typ reprezentací je charakteristický jejich konvenční charakter, který se ovšem mnohdy vyvíjel v průběhu dlouhého historického vývoje.

Symbolickými reprezentacemi přirozených čísel jsou jejich názvy v různých jazycích a číslovky různých grafických typů, včetně typů na kalkulačkách.

Symbolické reprezentace představuje např. jazyk matematické logiky, jazyk algebry, jazyk vektorového počtu nebo jazyk matematické analýzy.

Doložme dvěma příklady, jak podstatně se změnil přístup k řešení úlohy nebo důkazu pouhou změnou jazyka. Odkazy na učebnice uvádíme pouze jako materiál pro zmíněné srovnání. Nejde mi o žádnou kritiku či dokonce snahu učebnice vylepšovat. Víím, že autoři učebnic jsou vázáni řadou omezení a cílů, které nemohu, ale ani nechci, sledovat.

Dokažte větu: Přirozené číslo je dělitelné devíti, je-li dělitelný devíti jeho ciferný součet.

V jazyku aritmetiky můžeme tvrzení pouze ověřit pro libovolně zvolené přirozené číslo.

Tak např. pro číslo 2132 máme

$$\begin{aligned} 2132 &= 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 = 2(999 + 1) + 1 \cdot (99 + 1) + 3(9 + 1) + 2 = \\ &= 2 \cdot 999 + 1 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 2 + 1 + 3 + 2 = 9(222 + 11 + 3) + (2 + 1 + 3 + 2). \end{aligned}$$

Protože první sčítanec je dělitelný devíti, rozhoduje o dělitelnosti čísla devíti druhý sčítanec, tj. ciferný součet původního čísla.

Důkaz v jazyku algebry ([2], s. 122).

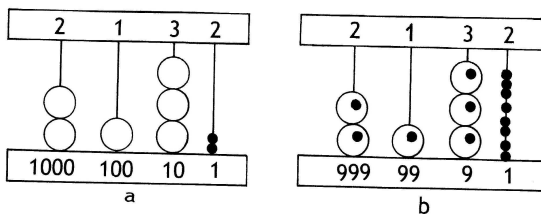
Je-li číslo n zapsáno číslicemi $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0$, tj. platí-li:

$$\begin{aligned} n &= c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\ &= c_k(99 \dots 9 + 1) + c_{k-1}(99 \dots 9 + 1) + \dots + c_1(9 + 1) + c_0 = \\ &= 9c_k(11 \dots 1) + 9c_{k-1}(11 \dots 1) + \dots + 9c_1 + (c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0) = \\ &= 9 \cdot [(11 \dots 1)c_k + (11 \dots 1)c_{k-1} + \dots + c_1] + (c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0). \end{aligned}$$

Protože i zde je první sčítanec dělitelný devíti, bude číslo n dělitelné devíti právě tehdy, bude-li dělitelný devíti jeho ciferný součet

$$(c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0).$$

Pomocí obrázku, tedy v ikonické reprezentaci, lze důkaz přiblížit následujícím způsobem. Na obr. 4a je znázorněno číslo 2132 na řádovém počítadle. Velké kuličky představují počty tisíců, stovek a desítek, malé počty jednotek. Jestliže od každé velké kuličky odejmeme jednu kuličku a přemístíme ji na drát jednotek, dostaneme „devítkové“ počítadlo (obr. 4b).

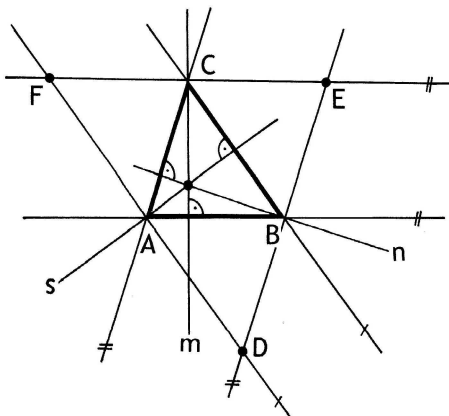


Obr. 4

Počet kuliček na drátu jednotek ovšem bude roven cifernému součtu původního čísla (počet tisíců + počet stovek + počet desítek + počet jednotek). Tento počet rozhoduje o dělitelnosti daného čísla devíti.

Stejně jako jsme znázornili číslo 2132, můžeme znázornit libovolné přirozené číslo; změní se pouze počet drátů a na každém drátě může být libovolný počet kuliček od nuly do devíti. Idea zdůvodnění se nemění.

Dokažte větu: Výšky libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem. Syntetický důkaz v jazyku geometrie, který zde připomenu, pochází od Karla Friedricha Gausse (1777–1855).



Obr. 5

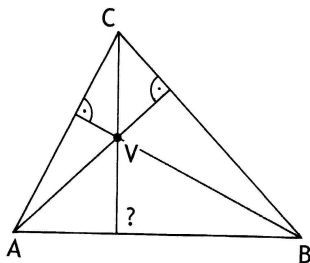
Vedeme-li každým vrcholem trojúhelníku ABC přímkou rovnoběžnou s protilehlou stranou, dostaneme podle obr. 5 trojúhelník DEF . Výšky

m, n, s trojúhelníku ABC jsou osami stran trojúhelníku DEF (neboť čtyřúhelníky $ABEC, ABCE, CBDA$ jsou rovnoběžníky). Protože tyto osy procházejí jedním bodem, procházejí jedním bodem i výšky původního trojúhelníku.

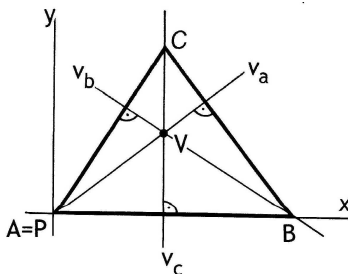
V jazyce vektorového počtu můžeme uvažovat takto (obr. 6): Sestrojíme průsečík V výšek z vrcholů A, B trojúhelníku ABC a vypočteme skalární součin:

$$\begin{aligned} VC \cdot BA &= VC \cdot (BC + CA) = VC \cdot BC + VC \cdot CA = \\ &= (VA - CA) \cdot BC + (VB + BC) \cdot CA = \\ VA \cdot BC - CA \cdot BC + VB \cdot CA + BC \cdot CA &= 0 \end{aligned}$$

neboť $VA \cdot BC = VB \cdot CA = 0$. Protože $VC \cdot BA = 0$, je přímka VC výškou ke straně AB trojúhelníku ABC .



Obr. 6



Obr. 7

Umístíme-li trojúhelník ABC do souřadnicové soustavy podle obr. 7, můžeme bez újmy na obecnosti zvolit souřadnice jeho vrcholů např. takto: $A[0, 0], B[b, 0], C[c, d]$ a k důkazu naší věty stačí ověřit, že přímky

$$\begin{aligned} v_a : & (c - b)x + dy = 0, \\ v_b : & cx + dy - bc = 0, \\ v_c : & x = c \end{aligned}$$

mají společný bod. Odvození rovnic výšek a nalezení jejich společného bodu je tak rutinní záležitostí analytické geometrie, tedy jazyka matematiky.

Enaktivní reprezentací (rýsováním) nelze větu o průsečíku výšek trojúhelníku dokázat, lze ji však ověřit pro libovolný narýsovaný trojúhelník. Takovýto postup může vést k přesvědčení o platnosti věty na určité úrovni rozvíjení matematických poznatků dokonce účinněji než např. formálně předvedený a ne plně pochopený důkaz. Enaktivně lze větu modelovat na počítači konstrukcí výšek trojúhelníku s „*pohyblivými vrcholy*“.

Různé způsoby jazykového zpracování téže problematiky ilustrujme příkladem *definice složené funkce*.

Karel Havlíček uvádí v populární, leč výborně zpracované knize *Diferenciální počet pro začátečníky* formulaci:

Mysleme si dvě funkce f , g , přičemž nezávisle proměnnou funkce g označme x , funkční hodnotu u , je tedy $u = g(x)$. Je-li u v definičním oboru funkce f , má smysl psát $y = f(u)$ čili $y = f(g(x))$. Tím je nakonec y vyjádřeno jako složená funkce proměnné x ([6], s. 189).

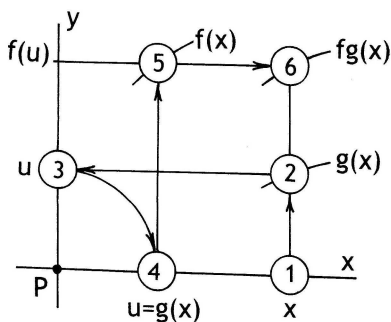
Dag Hrubý v učebnici matematické analýzy využívá, na rozdíl od Havlíčka, jehož definice je formulována běžným jazykem s využitím několika matematických termínů, velmi výrazně matematickou symboliku:

Říkáme, že funkce h je složena z funkcí g , f , právě když platí: $D_h = \{x \in D_g; g(x) \in D_f\}$ a $\forall x \in D_h$ je $h(x) = f(g(x))$. Funkci h označujeme symbolem $h = f \circ g$ ([11], s. 14).

Přitom ovšem D_g , D_f jsou již dříve zavedené symboly pro definiční obory funkcí g a f .

Ponechávám čtenáři na posouzení, která formulace je srozumitelnější. Je ovšem třeba mít na zřeteli, že k posouzení vhodnosti či nevhodnosti didaktického zpracování jakéhokoli tématu je třeba uvážit širší souvislosti, což zde nemůžeme dělat.

V ikonickém jazyku lze problematiku skládání funkcí ilustrovat obrázkem 8. Jsou-li sestrojeny grafy funkcí $g(x)$ a $f(x)$, sestrojíme hodnotu složené funkce v bodě x postupem 1-2-3-4-5-6.



Obr. 8

5. Kvaszova klasifikace jazyků matematiky a školní praxe

Ve své knize popsal Kvasz osm základních typů jazyků ([14], s. 86) a sedm typů přechodů mezi nimi (obr. 3). Jazyky jsou na obrázku znázorněny obdélníky, přechody pak šipkami. Čtyři z těchto přechodů (1, 3, 5, 7) odpovídají konstrukcím nových ikonických jazyků, tři (2, 4, 6) pak představují vznik nových jazyků symbolických. Schéma na obr. 3 představuje podle autora vývoj matematiky, ve vyučování je však situace jiná.

Pro matematické vzdělávání jsou podstatné otázky porozumění, které se pochopitelně uskutečňuje v duševním světě jednotlivých žáků, neprobíhá proto rovnoměrně a nelze patrně zjistit v jakém jazyku „žák právě myslí“. Podle mého názoru je již matematika prvního ročníku základní školy „hřištěm“ tří střídajících se jazyků. Např. poznávání malých přirozených čísel začíná „hrou“ s předměty, probíhá tedy v enaktivní reprezentaci, přitom se mohou dílčí výsledky zakreslovat (ikonická reprezentace) a někdy se i při neúplné úrovni porozumění zavádějí čísla, tedy reprezentace symbolická). Tři čárky, které kreslí dítě při odpočítávání předmětů, tedy při enaktivní reprezentaci jsou ikonickým vyjádřením počtu, mohou se ovšem stát i symbolem pro číslo tři.

Připomenu v této souvislosti dvě myšlenky Kvaszovy.

„Matematika se neskládá z přesného symbolického jazyka doplněného heuristickými obrázky, ale ze dvou jazyků téže hodnoty (of the same rank), jeden je symbolický, druhý ikonický“ ([14], s. 13). „Sjednocení (unification) symbolického a ikonického jazyka nám umožňuje chápat vývoj matematiky jako evoluci jejího jazyka“ ([14], s. 16).

Ve vyučování pak můžeme být, jak jsem již níže ukázal, někdy svědky „transmutace“ enaktivní reprezentace v reprezentaci ikonickou a ikonické v symbolickou.

Kontakt dítěte se světem není v naší civilizaci myslitelný bez rozvíjení jazyka dítěte. Dítě žije v prostředí své rodiny, ve své „přírodě“ a jazyk poznává jako prostředek své orientace v tomto světě. Spolu s jazykem se kultivuje myšlení dítěte. Na základě kontaktů se světem „věcí“ (tedy s Popperovým světem 1) si utváří dítě svět svých subjektivních zkušeností a představ (tedy svůj svět 2). Kontakt s prostředím, v němž dítě žije, utváří přirozené a mnohdy i „životně důležité“ i první představy protomatematického charakteru. Poznává maminku a tatínka, dvě své nožičky a ručičky, dva kroky, moc hraček, ... Prožívá dělení prostoru (postýlka, ohrádka, pokoj, byt, zahrada, auto, ...), vyplňování prostoru (kostky v krabici, pastelky v pouzdře, čaj v hrnku, ...) i pohyb v prostoru (jde z pokoje do pokoje, veze se v kočárku, jede autem, ...). Seznamuje se i s otázkami dimenzionální povahy (botička a její stopa, míč a jeho stín, ...), ale poznává i problémy kauzálního myšlení (když neuklidím hračky, nepůjde ven, ...).

Skutečnost, že každé normální dítě se v přirozeném vývoji naučí rozumět a mluvit jazykem rodičů (někdy dokonce i dvěma jazykům) je neuvěřitelný zázrak vývoje člověka. Vždyť tento malý rozvíjející se tvor zvládne symbolickou reprezentaci jevů okolního světa mluvenými slovy. Zvládne to „bez vědecké metody“ a jeho „učitelé“ (rodiče, prarodiče, sourozenci, ...) jsou až na zanedbatelné výjimky laici v oblasti filologie, filosofie, pedagogiky a biologie. Přikláním se k názoru amerického psychologa Hulla:

„Kdybychom učili děti mluvit ve škole, nikdy by se to nenaučily.“

Dalším divem vývoje dítěte je dětská kresba. Děti obvykle kreslí rády a „něco“. Vytvářejí tedy ikonické reprezentace, které se ovšem vzorům podobají dosti málo a mají tak, aspoň pro jejich autory charakter spíše symbolický.

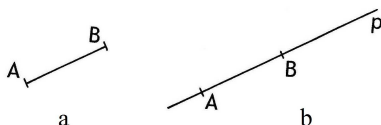
Školní matematika by měla prioritně vyrůstat ze světa dětí, tedy z fyzikálního světa 1 a zkušenosti a představy, které si děti individuálně utvářejí ve svých světech 2, by měly „dozrát“, především procesem abstrakce do pojmů, tedy do prvků světa 3.

Ve škole jsme dosti často svědky toho, že východiskem matematického vzdělávání jsou abstraktní matematické pojmy, tedy části světa 3, které jim učitel pomáhá pochopit názornými vyučovacími prostředky, tedy např. ikonickými reprezentacemi.

Představu o úsečce získá žák jejím rýsováním podle pravítka, přímku ovšem narýsovat nikdy celou nemůže, narýsuje vždy jen její část, tedy podle obr. 9a (úsečka) a 9b (přímka). Na obr. 9a je ovšem již nakreslena spíše symbolická reprezentace úsečky, neboť úsečka takto „nikdy nevypadá“. Symbolická reprezentace úsečky AB např. ve tvaru

$$X = A + t \cdot \mathbf{AB} \quad \text{a} \quad 0 \leq t \leq 1$$

je přirozeně zcela nenázorná.

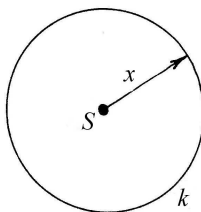


Obr. 9a, b

Podobně je tomu např. u reprezentace kružnice. Na obr. 10 je ikonická reprezentace kružnice k se středem S a poloměrem r , jejími symbolickými reprezentacemi jsou např. zápisy

$$k = \{X \in \varrho, |SX| = r\}, \quad (m - n)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde ovšem ϱ je rovina, v níž kružnice leží, a m, n jsou souřadnice jejího středu.



Obr. 10

6. Závěry

Učitel by měl při vyučování pracovat s takovými reprezentacemi matematických pojmů a postupů, které jsou blízké žákům, které jsou přirozené. Např. vizuální reprezentace nemusí být přitažlivá pro všechny žáky. *Umberto Eco* upozorňuje, že „západní myšlení“ je založeno na řeckém

principu poznání, podle něhož poznání prochází vždy viděním, kdežto kultura židovská dává přednost slovním vyjádřením. Přitom „ikona je od nepaměti součástí „vojska analogického“, text položil základy budoucímu digitálnímu systému“ ([4], s. 97 a s. 107). Neporozumění matematice může mít kořeny v neporozumění jejímu jazyku. Matematiku nelze od jejího jazyka oddělit, jazyk je formou existence matematiky. Probírání abstraktních matematických teorií bez náležitého porozumění je jedním z hlavních problémů matematického vzdělávání. Studenti by se měli učit jazyku matematiky podobně, jako se dítě učí jazyku mateřskému, „implicitně“, tím, že ho spolu s učitelem používají při řešení problémů. Porozumět matematice znamená osvojit si její jazyk.

Literatura

- [1] *Bruner, J. S.*: The Growth of Representational Processes in Childhood, ruský překlad in *Psychologija poznaniya*. Progress, Moskva 1977.
- [2] *Bušek, I., Boček, L., Calda, E.*: Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha 1994.
- [3] *Divíšek, J. a kol.:* Svět čísel a tvarů. Prometheus, Praha 1996.
- [4] *Eco, U.*: Kant a ptakopysk. Argo, Praha 2011.
- [5] *Genau, A.*: Dějiny počtářství. Šolc, Telč 1906.
- [6] *Havlíček, K.*: Diferenciální počet pro začátečníky. SNTL, Praha 1962.
- [7] *Hejtný, M., Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha 2009.
- [8] *Hejtný, M. a kol.*: Matematika, učebnice pro 1. ročník základní školy. Fraus, Plzeň 2007.
- [9] *Holubář, J.*: Metodické semináře akademika Čecha o matematice. Matematika ve škole 6. X (1960), s. 325–329.
- [10] *Hošpesová, A. a kol.*: Matematická gramotnost a vyučování matematice. JU, České Budějovice 2011.
- [11] *Hrubý, D., Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha 1997.
- [12] *Kalhous, Z., Obst, O. a kol.*: Školní didaktika. Portál, Praha 2002.
- [13] *Kuřina, F.*: Lze učit matematice zajímavě? Matematika, fyzika, informatika č. 3, roč. 3(1993), s. 2–12.
- [14] *Kvasz, L.*: Patterns of Change. Birkhäuser, Basel 2008.
- [15] *Popper, K. R.*: Věčné hledání. Prostor, Praha 1995.
- [16] *Průcha, J.*: Moderní pedagogika. Portál, Praha 2002.
- [17] *Vopěnka, P.*: Meditace o základech vědy. Práh, Praha 2001.
- [18] *Vopěnka, P.*: Vyprávění o kráse novobaroční matematiky. Práh, Praha 2004.
- [19] *Vyšín, J.*: Elementární geometrie I. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.